Plaquette 3 – Problèmes d'optimisation : aires, volumes, coûts et distances

Variations et extremums — Première spé maths

Exercices

Méthode

On **nomme** l'inconnue, on **exprime** la quantité à optimiser, on précise le **domaine**, on dérive, on **factorise** et l'on conclut par le tableau de variations — sans oublier de vérifier que l'optimum est dans le domaine.

Exercice 1 – Rectangle de périmètre fixé

Parmi les rectangles de périmètre 40 cm, déterminer celui d'aire maximale.

Exercice 2 – Enclos contre un mur

Avec 60 m de clôture, on borde un enclos rectangulaire adossé à un mur (le mur remplace un côté). Maximiser l'aire.

Exercice 3 – Boîte de volume maximal

Dans une feuille rectangulaire 30×18 cm, on découpe des carrés de côté x aux quatre coins et on relève les bords. Maximiser le volume.

Exercice 4 – Cylindre de volume imposé

Une boîte de conserve cylindrique doit contenir 1 litre (1000 cm³). Déterminer le rayon minimisant la surface de métal utilisée.

Exercice 5 – Bénéfice maximal

Une entreprise vend q articles au prix unitaire $p = 50 - 0{,}2q$ euros, avec un coût $C(q) = 10q + 500$. Déterminer la production maximisant le bénéfice.

Exercice 6 – Triangle d'aire maximale

Un triangle rectangle a une hypoténuse de 10 cm. Déterminer les cathètes maximisant l'aire.

Exercice 7 – Distance à une droite

Déterminer le point de la courbe $y = \dfrac{1}{x}$ (avec $x > 0$) le plus proche de l'origine.

Exercice 8 – Fenêtre en plein cintre

Une fenêtre est formée d'un rectangle surmonté d'un demi-disque. Le périmètre total vaut 8 m. Maximiser l'aire.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Coût de transport

Un camion consomme $\left(6 + \frac{v^2}{400}\right)$ litres par heure à la vitesse v (en km/h). Déterminer la vitesse minimisant la consommation aux 100 km.

Exercice 10 – Aire d'un trapèze inscrit

Un trapèze isocèle a ses deux sommets inférieurs en $(-2\,;0)$ et $(2\,;0)$, et ses deux sommets supérieurs sur le cercle de centre O et de rayon 2. Maximiser son aire.

Exercice 11 – Pliage d'une gouttière

Une plaque de 30 cm de large est pliée en trois pour former une gouttière de section rectangulaire. Déterminer la hauteur maximisant l'aire de la section.

Exercice 12 – Prix optimal

Un cinéma vend 400 places à 8 €. Chaque hausse de 0,50 € fait perdre 20 spectateurs. Déterminer le prix maximisant la recette.

Exercice 13 – Chemin le plus court

Une usine est en $A(0\,;3)$ et un entrepôt en $B(8\,;5)$, du même côté d'une route rectiligne (l'axe des abscisses). On veut construire un point de raccordement $M(x\,;0)$ minimisant $AM + MB$. Déterminer x.

Exercice 14 – Cône de volume maximal

Un cône est inscrit dans une sphère de rayon 3. Sa hauteur est h et son rayon de base r, avec $r^2 = h(6-h)$. Maximiser le volume.

Exercice 15 – Somme de deux carrés

Deux nombres positifs ont pour somme 12. Minimiser la somme de leurs carrés, puis maximiser leur produit.

Exercice 16 – Synthèse : conception d'un réservoir

Un réservoir à base carrée **sans couvercle** doit contenir 32 m³.

a) Exprimer l'aire de tôle en fonction du côté x de la base.

b) Minimiser cette aire.

c) Comparer avec un réservoir cubique de même volume.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).