Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : études complètes et modélisation

Variations et extremums — Première spé maths

Exercices

Méthode

On mène une **étude complète** (domaine, dérivée, variations, extremums, tangentes, position relative), puis on l'applique à des **modèles** issus de la physique, de l'économie ou de la géométrie.

Exercice 1 – Étude complète d'une cubique

Soit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$.

a) Étudier les variations.

b) Montrer que 1 est racine et factoriser.

c) Déterminer le nombre de racines.

Exercice 2 – Position relative courbe-droite

Étudier la position relative de la courbe de $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x}$ et de la droite $y = x$ sur $]0\,;+\infty[$.

Exercice 3 – Modèle de refroidissement

La température d'un objet est $T(t) = 20 + 60 \times \dfrac{1}{1+0{,}5t}$ (en °C, t en minutes). Étudier la décroissance et déterminer quand T passe sous 30 °C.

Exercice 4 – Étude avec racine carrée

Étudier les variations de $f(x) = x\sqrt{4-x}$ sur $[0\,;4]$ et déterminer son maximum.

Exercice 5 – Trajectoire optimale

Un projectile suit la trajectoire $y = x - \dfrac{x^2}{40}$ (en mètres). Déterminer la hauteur maximale, la portée, et l'angle de départ.

Exercice 6 – Fonction à deux paramètres

Soit $f(x) = \dfrac{ax+b}{x^2+1}$. Déterminer a et b pour que la courbe passe par $(1\,;1)$ avec une tangente horizontale en ce point.

Exercice 7 – Intensité lumineuse

Deux lampes sont en $A(0\,;0)$ et $B(10\,;0)$, d'intensités 1 et 8. L'éclairement en $M(x\,;0)$ vaut $E(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{8}{(10-x)^2}$. Déterminer le point le moins éclairé entre les deux.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Aire sous une tangente

Soit $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$. La tangente au point d'abscisse a coupe les axes en P et Q. Montrer que l'aire du triangle OPQ est **constante**.

Exercice 9 – Concentration d'un médicament

La concentration d'un médicament est $C(t) = \dfrac{4t}{t^2+4}$ (en mg/L, t en heures).

Déterminer le pic de concentration et l'instant où il est atteint.

Exercice 10 – Deux tangentes perpendiculaires

Sur la parabole $y = x^2$, déterminer deux points dont les tangentes sont perpendiculaires, puis leur point d'intersection.

Exercice 11 – Étude d'une fonction paire

Soit $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$. Étudier la parité, les variations et les extremums.

Exercice 12 – Prix et demande

La demande d'un produit au prix p est $q = 200 - 4p$ (en unités). Le coût unitaire est 15 €. Déterminer le prix maximisant le bénéfice.

Exercice 13 – Fonction définie par un quotient de degrés 2

Étudier les variations de $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$ et donner son image.

Exercice 14 – Optimisation avec contrainte de coût

On dispose de 600 € pour clôturer un enclos rectangulaire : le côté avant coûte 10 €/m, les trois autres 5 €/m. Maximiser l'aire.

Exercice 15 – Une tangente qui traverse la courbe

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$. Déterminer la tangente au point d'abscisse 1 et étudier la position relative.

Exercice 16 – Synthèse : étude et optimisation combinées

Soit $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$ sur $]-1\,;+\infty[$.

a) Étudier les variations.

b) Déterminer la tangente au point d'abscisse 1.

c) Un rectangle a un sommet sur la courbe au point d'abscisse x, et ses côtés sur les axes. Déterminer x minimisant son périmètre pour $x > 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).