MATHÉMATIQUES

Variations et extremums

Première spé maths

Signe de la dérivée • Sens de variation • Tableau de variations • Extremum
Fonctions paires et impaires • Optimisation • Inégalités • Position relative • Méthode de Newton

Repères du programme

Ce cours suit le **programme de l'enseignement de spécialité de mathématiques de première générale** (arrêté du 26 février 2026, BO n°14 du 2 avril 2026, rentrée 2026), partie « Analyse », section « Variations et courbes représentatives des fonctions ». Il couvre :

- représentation algébrique et graphique des fonctions paires, impaires ; traduction géométrique ;
- lien entre le sens de variation d'une fonction dérivable sur un intervalle et le signe de sa dérivée ; caractérisation des fonctions constantes ;
- nombre dérivé en un extremum, tangente à la courbe ;
- étudier les variations et les extremums ; résoudre un problème d'optimisation ; établir une inégalité ; étudier la position relative de deux courbes ; fonction polynôme du second degré ;
- **algorithme** : méthode de Newton, dans des cas favorables.

Objectif : étudier les variations d'une fonction à l'aide de sa dérivée, en déduire ses extremums, reconnaître une fonction paire ou impaire, et résoudre des problèmes d'optimisation.

Document pédagogique – mathlvl.fr

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Table des matières

1 Fonctions paires, fonctions impaires **3**

2 Sens de variation et signe de la dérivée **4**

3 Extremums **4**

4 Applications **5**

4.1 Optimisation 5

4.2 Inégalités et position relative 5

4.3 Méthode de Newton 6

5 Erreurs classiques **6**

6 Fiche de synthèse **6**

7 Exercices d'application **7**

8 Corrigés des exercices **7**

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

1. Fonctions paires, fonctions impaires

Parité

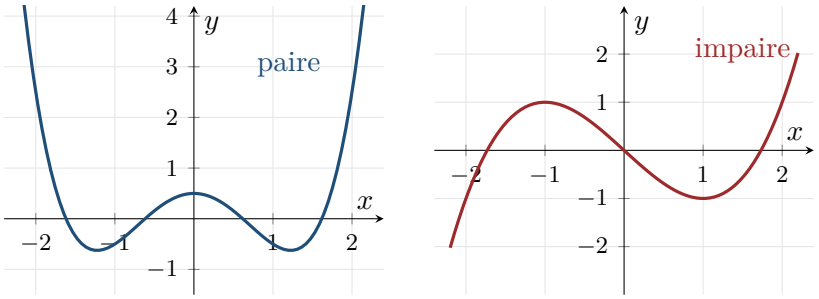
Soit f une fonction définie sur un ensemble D **symétrique par rapport à** 0 (si $x \in D$, alors $-x \in D$).

- f est **paire** si, pour tout $x \in D$, $f(-x) = f(x)$;
- f est **impaire** si, pour tout $x \in D$, $f(-x) = -f(x)$.

Traduction géométrique

Dans un repère orthogonal :

- f est paire si et seulement si sa courbe est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées** ;
- f est impaire si et seulement si sa courbe est **symétrique par rapport à l'origine**.



À gauche $x \mapsto \frac{x^4}{2} - \frac{3x^2}{2} + \frac{1}{2}$, paire ; à droite $x \mapsto \frac{x^3}{2} - \frac{3x}{2}$, impaire.

Étudier la parité

- $f(x) = x^4 - 3x^2$ sur $\mathbb{R}$: $f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 = x^4 - 3x^2 = f(x)$, f est paire.
- $g(x) = x^3 - 5x$: $g(-x) = -x^3 + 5x = -g(x)$, g est impaire.
- $h(x) = x^2 + x$: $h(1) = 2$ et $h(-1) = 0$, donc $h(-1) \neq h(1)$ et $h(-1) \neq -h(1)$: h n'est ni paire ni impaire.
- $x \mapsto |x|$ et $x \mapsto x^2$ sont paires ; $x \mapsto \frac{1}{x}$ (sur $\mathbb{R}^*$) et $x \mapsto x^3$ sont impaires.

Intérêt de la parité

Si f est paire ou impaire, il suffit de l'étudier sur $[0\,;+\infty[$ (ou $D \cap [0\,;+\infty[$) ; on complète la courbe par symétrie. Une fonction paire a des variations « inversées » de part et d'autre de 0.

Un seul contre-exemple suffit

Pour montrer qu'une fonction n'est pas paire, il suffit d'un x tel que $f(-x) \neq f(x)$; pour montrer qu'elle l'est, il faut un calcul valable pour **tout** x. Et le domaine doit être symétrique : $\sqrt{x}$ n'est ni paire ni impaire.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

2. Sens de variation et signe de la dérivée

Lien entre variations et dérivée (admis)

Soit f une fonction dérivable sur un **intervalle** I.

- Si $f' > 0$ sur I (sauf éventuellement en un nombre fini de points où f' s'annule), f est strictement croissante sur I.
- Si $f' < 0$ sur I (même réserve), f est strictement décroissante sur I.
- f est constante sur I si et seulement si $f' = 0$ sur I.

Réciproquement, si f est croissante sur I, alors $f' \geq 0$ sur I.

Sur un intervalle

La fonction inverse a une dérivée strictement négative sur $\mathbb{R}^*$, mais elle n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$: $-1 < 1$ et $\frac{1}{-1} < \frac{1}{1}$. Elle est décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$ **séparément**.

Étudier les variations

1. Préciser l'ensemble d'étude ;
2. calculer $f'(x)$ et le **factoriser** ;
3. étudier le signe de $f'(x)$ (tableau de signes) ;
4. dresser le tableau de variations, avec les valeurs aux bornes et aux extremums.

Une fonction polynôme de degré 3

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ sur $\mathbb{R}$: $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x+1)(x-3)$.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	6	↘	-26	↗	

$f(-1) = -1 - 3 + 9 + 1 = 6$ et $f(3) = 27 - 27 - 27 + 1 = -26$.

3. Extremums

Extremum local

f admet un **maximum local** en a s'il existe un intervalle ouvert J contenant a tel que $f(x) \leq f(a)$ pour tout $x \in J \cap D$; un **minimum local** si $f(x) \geq f(a)$. Un extremum est un maximum ou un minimum.

Nombre dérivé en un extremum

Si f est dérivable sur un intervalle ouvert I et admet un extremum local en $a \in I$, alors $f'(a) = 0$: la tangente au point d'abscisse a est **horizontale**.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réciproquement, si f' s'annule en a **en changeant de signe**, f admet un extremum local en a.

La réciproque sans changement de signe est fausse

$f(x) = x^3$: $f'(0) = 0$, mais $f' = 3x^2 \geq 0$ ne change pas de signe ; f est croissante et n'a pas d'extremum en 0 : la courbe traverse sa tangente horizontale.

Second degré

$f(x) = -2x^2 + 8x - 3$: $f'(x) = -4x + 8$, positive pour $x < 2$, négative pour $x > 2$. f admet un maximum en 2, égal à $f(2) = 5$. Plus généralement, $ax^2 + bx + c$ a un extremum en $x = -\frac{b}{2a}$ (maximum si $a < 0$, minimum si $a > 0$).

4. Applications

4.1. Optimisation

Résoudre un problème d'optimisation

1. Choisir la variable x et l'intervalle des valeurs possibles ;
2. exprimer la grandeur à optimiser en fonction de x ;
3. étudier les variations sur l'intervalle ;
4. conclure par une phrase, avec l'unité.

Une boîte sans couvercle

Dans un carré de carton de 30 cm de côté, on découpe aux quatre coins des carrés de côté x (en cm), puis on replie : on obtient une boîte de volume $V(x) = x(30 - 2x)^2$ pour $0 < x < 15$.

$V'(x) = (30 - 2x)^2 + x \times 2(30 - 2x) \times (-2) = (30 - 2x)\big[(30 - 2x) - 4x\big] = (30 - 2x)(30 - 6x)$.

Sur $]0\,;15[$, $30 - 2x > 0$, donc $V'(x)$ a le signe de $30 - 6x$: positive pour $x < 5$, négative après. Le volume est maximal pour $x = 5$ cm : $V(5) = 5 \times 20^2 = 2\,000$ cm^3.

4.2. Inégalités et position relative

Démontrer une inégalité, comparer deux courbes

Pour montrer $f(x) \geq g(x)$ sur I, on étudie $d(x) = f(x) - g(x)$: si son minimum sur I est positif ou nul, l'inégalité est prouvée. Le signe de d donne la **position relative** des courbes : $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ là où $d \geq 0$.

$x + \frac{1}{x} \geq 2$ pour $x > 0$

$f(x) = x + \frac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$: $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$, du signe de $x - 1$ sur $]0\,;+\infty[$. f décroît sur $]0\,;1]$, croît sur $[1\,;+\infty[$: son minimum est $f(1) = 2$. Donc $x + \frac{1}{x} \geq 2$ pour tout $x > 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

4.3. Méthode de Newton

Approcher une solution de $f(x) = 0$

On part d'une valeur x_0 proche de la solution, et l'on remplace la courbe par sa tangente : la tangente en x_n coupe l'axe des abscisses en

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (f'(x_n) \neq 0).$$

Approcher $\sqrt{2}$

Avec $f(x) = x^2 - 2$, $f'(x) = 2x$: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{2}{x_n}\right)$. En partant de $x_0 = 1$: $x_1 = 1{,}5$; $x_2 \approx 1{,}416\,67$; $x_3 \approx 1{,}414\,216$, déjà correct à 10^{-5} près.

```
def newton(x, n):
    for k in range(n):
        x = x - (x**2 - 2) / (2 * x)
    return x
```

5. Erreurs classiques

À éviter

- Conclure à un extremum dès que $f'(a) = 0$ sans vérifier le changement de signe.
- Appliquer le lien dérivée-variations sur une réunion d'intervalles.
- Oublier de factoriser la dérivée avant d'étudier son signe.
- Croire qu'une fonction est paire parce que $f(-1) = f(1)$: il faut l'égalité pour tout x.
- Dans un problème concret, oublier l'intervalle des valeurs possibles de x.

6. Fiche de synthèse

Parité	paire : $f(-x) = f(x)$, symétrie par rapport à l'axe des ordonnées ; impaire : $f(-x) = -f(x)$, symétrie par rapport à l'origine
Variations	$f' > 0$ sur un intervalle : croissante ; $f' < 0$: décroissante ; $f' = 0$: constante
Extremum	$f'(a) = 0$ (tangente horizontale) ; extremum si f' change de signe en a
Second degré	extremum en $-\frac{b}{2a}$
Inégalité	étudier $f - g$ et son minimum
Newton	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

7. Exercices d'application

Exercice 1 – Parité

Étudier la parité de : a) $f(x) = 2x^2 - |x|$; b) $g(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$; c) $h(x) = x^3 + 1$.

Exercice 2 – Variations

Étudier les variations de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$ sur $\mathbb{R}$ et donner ses extremums locaux.

Exercice 3 – Optimisation

Un enclos rectangulaire est bordé d'un côté par un mur ; on dispose de 40 m de grillage pour les trois autres côtés. On note x la longueur (en m) de chacun des deux côtés perpendiculaires au mur. Exprimer l'aire $A(x)$, puis trouver x pour que l'aire soit maximale.

Exercice 4 – Inégalité

Démontrer que pour tout réel $x \geq 0$, $x^3 - 3x + 2 \geq 0$.

8. Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

Corrigé. a) $f(-x) = 2x^2 - |-x| = 2x^2 - |x| = f(x)$: paire. b) $g(-x) = \dfrac{-x}{x^2+1} = -g(x)$: impaire. c) $h(1) = 2$ et $h(-1) = 0$: ni paire ni impaire.

Corrigé de l'exercice 2

Corrigé. $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x+1)(x-2)$. f est croissante sur $]-\infty\,;-1]$, décroissante sur $[-1\,;2]$, croissante sur $[2\,;+\infty[$. Maximum local $f(-1) = -2 - 3 + 12 + 4 = 11$; minimum local $f(2) = 16 - 12 - 24 + 4 = -16$.

Corrigé de l'exercice 3

Corrigé. Le côté parallèle au mur mesure $40 - 2x$, avec $0 < x < 20$. $A(x) = x(40 - 2x) = -2x^2 + 40x$, $A'(x) = -4x + 40$, positive pour $x < 10$, négative après. L'aire est maximale pour $x = 10$ m : $A(10) = 10 \times 20 = 200$ m^2.

Corrigé de l'exercice 4

Corrigé. $f(x) = x^3 - 3x + 2$: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$, du signe de $x - 1$ sur $[0\,;+\infty[$. f décroît sur $[0\,;1]$ et croît sur $[1\,;+\infty[$: son minimum sur $[0\,;+\infty[$ est $f(1) = 0$. Donc $f(x) \geq 0$. (En effet, $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$.)

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).