

Plaquette 4 - Calcul littéral et équations

Automatismes — Première STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Développer.

$$k(a + b) = ka + kb \quad (a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Identités remarquables.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Résoudre une équation du premier degré. On isole l'inconnue en faisant la même opération des deux côtés.

Équation produit.

$$A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0$$

Inéquation. Mêmes règles, **sauf** : multiplier ou diviser par un nombre **négatif** inverse le sens.

Isoler une variable dans une formule.

Formule	Isoler	Résultat
$U = RI$	R	$R = \frac{U}{I}$
$P = UI$	I	$I = \frac{P}{U}$
$E = Pt$	t	$t = \frac{E}{P}$
$P = \frac{U^2}{R}$	R	$R = \frac{U^2}{P}$

Mise en équation. Nommer l'inconnue, traduire chaque phrase, résoudre, **revenir au contexte**.

⚠ Vérifier toujours la solution dans l'énoncé de départ, pas seulement dans l'équation.

Correction de l'exercice 1 - Développer

a) On distribue le 3 : $6x - 15 + 4x = 10x - 15$.

b) Double distribution : $x^2 - 3x + 4x - 12 = x^2 + x - 12$.

c) On applique l'identité $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = 2x$ et $b = 3$:

$$(2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$$

d) Avec $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$: $(5x - 2)(5x + 2) = 25x^2 - 4$.

Contrôle en $x = 1$: c) $(2 + 3)^2 = 25 = 4 + 12 + 9$; d) $3 \times 7 = 21 = 25 - 4$. Oublier le double produit en c) est l'erreur classique.

Réponse. a) $10x - 15$ · b) $x^2 + x - 12$ · c) $4x^2 + 12x + 9$ · d) $25x^2 - 4$.

Correction de l'exercice 2 - Factoriser

- a) 6 est un facteur commun de $12x$ et 18 : $12x - 18 = 6(2x - 3)$.
 b) Différence de deux carrés : $x^2 - 49 = x^2 - 7^2 = (x - 7)(x + 7)$.
 c) $9x^2 = (3x)^2$, $1 = 1^2$, et le double produit $2 \times 3x \times 1 = 6x$ correspond :
 $9x^2 + 6x + 1 = (3x + 1)^2$.
 d) $(x - 2)$ est un facteur commun :
- $$(x - 2)[(x + 5) + (3x - 1)] = (x - 2)(4x + 4) = 4(x - 2)(x + 1)$$

Contrôle de d) en $x = 3$: $1 \times 8 + 1 \times 8 = 16$ et $4 \times 1 \times 4 = 16$.

Réponse. a) $6(2x - 3)$ · b) $(x - 7)(x + 7)$ · c) $(3x + 1)^2$ · d) $4(x - 2)(x + 1)$.

Correction de l'exercice 3 - Équations du premier degré

On regroupe les termes en x d'un côté et les constantes de l'autre, en faisant la même opération sur les deux membres.

- a) $6x + 5 = 47 \Leftrightarrow 6x = 42 \Leftrightarrow x = 7$. **Vérification** : $42 + 5 = 47$.
 b) $2x + 14 = 3x - 8 \Leftrightarrow 14 + 8 = 3x - 2x \Leftrightarrow x = 22$. **Vérification** : $44 + 14 = 58 = 66 - 8$.
 c) On distribue d'abord :

$$5x - 15 + 2 = 3x + 1 \Leftrightarrow 2x = 14 \Leftrightarrow x = 7$$

Vérification : $5 \times 4 + 2 = 22 = 21 + 1$. Oublier de distribuer le 5 sur le -3 est l'erreur classique.

Réponse. a) $x = 7$ · b) $x = 22$ · c) $x = 7$.

Correction de l'exercice 4 - Équation produit

Un produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.

- a) $2x - 6 = 0$ ou $x + 4 = 0$: $x = 3$ ou $x = -4$. **Vérification** : en $x = 3$, $0 \times 7 = 0$.
 b) $x^2 - 49 = (x - 7)(x + 7) = 0$: $x = 7$ ou $x = -7$. Ne donner que 7 serait une erreur.
 c) $3x = 0$ ou $x - 5 = 0$: $x = 0$ ou $x = 5$; le facteur 3, non nul, ne donne pas de solution.

$$A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0$$

La règle ne vaut que pour un produit égal à **zéro** : pour $(x - 2)(x + 1) = 4$, elle ne s'applique pas.

Réponse. a) 3 et -4 · b) 7 et -7 · c) 0 et 5.

Correction de l'exercice 5 - Inéquations

On résout comme une équation, mais en multipliant ou divisant par un nombre **négatif**, on inverse le sens de l'inégalité.

- a) $8x + 30 \leq 150 \Leftrightarrow 8x \leq 120 \Leftrightarrow x \leq 15$ (division par 8, positif).
 b) $-3x + 7 > 22 \Leftrightarrow -3x > 15 \Leftrightarrow x < -5$ (division par -3 , le sens s'inverse). **Vérification** : $x = -6$ donne $25 > 22$, et $x = -4$ donne 19, qui ne convient pas.
 c) $5x - 4 < 2x + 11 \Leftrightarrow 3x < 15 \Leftrightarrow x < 5$.

$$-3x > 15 \Leftrightarrow x < -5$$

Seul un facteur négatif inverse le sens : ni à chaque étape, ni jamais.

Réponse. a) $x \leq 15$ · b) $x < -5$ · c) $x < 5$.

Correction de l'exercice 6 - Isoler une variable

Pour isoler une grandeur, on fait l'opération inverse des deux côtés.

a) On divise par R (non nul) : $I = \frac{U}{R}$.

b) On divise par I : $U = \frac{P}{I}$.

c) On divise par P : $t = \frac{E}{P}$ (des joules divisés par des watts donnent des secondes).

d) On multiplie par R , puis on divise par P :

$$P = \frac{U^2}{R} \Leftrightarrow PR = U^2 \Leftrightarrow R = \frac{U^2}{P}$$

Application : pour $U = 230$ V et $P = 48$ W, $R = \frac{52\,900}{48} \approx 1\,102 \, \Omega$.

Réponse. a) $I = \frac{U}{R}$ · b) $U = \frac{P}{I}$ · c) $t = \frac{E}{P}$ · d) $R = \frac{U^2}{P}$.

Correction de l'exercice 7 - Substituer dans une formule

a) Avec $r = 0,25$ m :

$$2\pi \times 0,25 = 0,5\pi \approx 1,5708 \text{ m} \quad \pi \times 0,25^2 = 0,0625\pi \approx 0,19635 \text{ m}^2$$

b) On résout $2\pi r = 3$, d'où $r = \frac{3}{2\pi} \approx 0,4775$ m. **Contrôle** : $2\pi \times 0,4775 \approx 3$.

Doubler le rayon double le périmètre mais quadruple l'aire : pour $r = 0,5$ m, l'aire vaut environ $0,7854 \text{ m}^2$, soit $4 \times 0,19635$.

Réponse. a) $\approx 1,5708$ m et $\approx 0,19635 \text{ m}^2$ · b) $r \approx 0,4775$ m.

Correction de l'exercice 8 - Mettre en équation

a) Le coût comprend une part fixe de 60 € et 7,50 € par séance : $C(x) = 7,5x + 60$.

b) On veut $C(x) \leq 420$:

$$7,5x + 60 \leq 420 \Leftrightarrow 7,5x \leq 360 \Leftrightarrow x \leq 48$$

On peut faire au plus 48 **séances**, et le budget est alors exactement atteint ($360 + 60 = 420$ €) ; 49 séances coûteraient 427,50 €. Le coût moyen par séance vaut $\frac{420}{48} = 8,75$ €, plus que 7,50 € car l'abonnement se répartit sur les séances.

Réponse. a) $C(x) = 7,5x + 60$ · b) 48 séances.

Correction de l'exercice 9 - Équation avec fractions

a) Deux fractions sont égales si leurs « produits en croix » sont égaux : $12x = 3 \times 20 = 60$, donc $x = 5$.

b) On multiplie par 4 : $3x = 60$, donc $x = 20$. **Vérification** : $\frac{60}{4} = 15$.

c) Produits en croix :

$$3(x + 2) = 5(x - 1) \Leftrightarrow 3x + 6 = 5x - 5 \Leftrightarrow 11 = 2x \Leftrightarrow x = 5,5$$

Vérification : $\frac{7,5}{5} = 1,5$ et $\frac{4,5}{3} = 1,5$. Il ne faut pas oublier de distribuer les coefficients.

Réponse. a) $x = 5$ · b) $x = 20$ · c) $x = 5,5$.

Correction de l'exercice 10 - Un système

On utilise la substitution : la seconde équation donne directement $y = 4x - 13$. On remplace y dans la première :

$$2x + 3(4x - 13) = 31 \Leftrightarrow 14x - 39 = 31 \Leftrightarrow x = 5$$

puis $y = 4 \times 5 - 13 = 7$.

Vérification : $2 \times 5 + 3 \times 7 = 31$ et $4 \times 5 - 7 = 13$. On aurait aussi pu multiplier la seconde équation par 3 ($12x - 3y = 39$) et l'ajouter à la première pour éliminer y : $14x = 70$. Le couple solution est (5 ; 7).

Réponse. $x = 5$ et $y = 7$.

Correction de l'exercice 11 - Repérer une erreur

La première étape est juste : $-2x = 15 - 9 = 6$. L'erreur est dans la seconde : il faut diviser par -2 , pas par 2.

$$-2x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{6}{-2} = -3$$

Vérification : $-2 \times (-3) + 9 = 6 + 9 = 15$. Avec la réponse de l'élève, $-2 \times 3 + 9 = 3 \neq 15$.

Remplacer la solution trouvée dans l'équation prend dix secondes et détecte toutes les erreurs de signe. Dans une inéquation, la même division par -2 inverserait en plus le sens : $-2x > 6$ donne $x < -3$.

Réponse. Diviser par -2 donne $x = -3$, pas 3.

Correction de l'exercice 12 - Deux formules enchaînées

a) On remplace U par RI dans $P = UI$:

$$P = (RI) \times I = RI^2$$

b) On remplace I par $\frac{U}{R}$: $P = U \times \frac{U}{R} = \frac{U^2}{R}$.

c) $P = 22 \times 1,5^2 = 22 \times 2,25 = 49,5$ W.

Contrôle : $U = 22 \times 1,5 = 33$ V, puis $\frac{33^2}{22} = \frac{1089}{22} = 49,5$ et $33 \times 1,5 = 49,5$ W. Comme P dépend de I^2 , doubler le courant quadruple la puissance (198 W).

Réponse. a) $P = RI^2$ · b) $P = \frac{U^2}{R}$ · c) 49,5 W.

Correction de l'exercice 13 - Un programme de calcul

a) On traduit chaque étape : $4x$, puis $4x + 6$, puis $\frac{4x+6}{2} = 2x + 3$, puis $2x + 3 - 3$:
résultat = $2x$

Le programme double simplement le nombre de départ. **Contrôle** avec 5 : 20 ; 26 ; 13 ; 10 = 2×5 .

b) $2x = 34$ donne $x = 17$. **Vérification** : 68 ; 74 ; 37 ; 34. Le calcul littéral révèle le mécanisme du programme, sans tâtonner.

Réponse. a) $2x$ · b) $x = 17$.

Correction de l'exercice 14 - Une inéquation de gestion

La machine coûte au total $2\,400 + 250 = 2\,650$ €. Après x jours, elle a fait économiser $38x$ €. Elle est rentabilisée lorsque

$$38x \geq 2\,650 \Leftrightarrow x \geq \frac{2\,650}{38} \approx 69,74$$

Le plus petit nombre entier de jours qui convient est 70. **Vérification :**

$38 \times 70 = 2\,660 \geq 2\,650$, alors que $38 \times 69 = 2\,622 < 2\,650$.

Sur 220 jours d'activité, l'économie atteint 8 360 €, soit un gain net de 5 710 € la première année. Les frais d'installation retardent la rentabilité de 6 jours.

Réponse. À partir de 70 jours.

Correction de l'exercice 15 - Un encadrement

On applique les mêmes opérations aux trois membres de l'encadrement.

a) On multiplie par 3 (positif, l'ordre est conservé) : $6 \leq 3x \leq 15$, puis on ajoute 4 : $10 \leq 3x + 4 \leq 19$.

b) On multiplie par -2 (négatif, l'ordre **s'inverse**) : $-10 \leq -2x \leq -4$, puis on ajoute 1 : $-9 \leq -2x + 1 \leq -3$

Contrôle : $x = 2$ donne -3 et $x = 5$ donne -9 .

c) La fonction carré est croissante sur les nombres positifs, et x est positif : $4 \leq x^2 \leq 25$. Si x pouvait être négatif, par exemple $-3 \leq x \leq 2$, le carré irait de 0 à 9 : il faut vérifier le sens de variation avant d'encadrer.

Réponse. a) $10 \leq 3x + 4 \leq 19$ · b) $-9 \leq -2x + 1 \leq -3$ · c) $4 \leq x^2 \leq 25$.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : un dimensionnement

a) Le volume est le produit des trois dimensions : $V(x) = x(x - 2) \times 0,5 = 0,5x^2 - x$, pour $x > 2$ (la largeur doit être positive).

b) $V(4) = 0,5 \times 16 - 4 = 4 \text{ m}^3$. **Contrôle :** $4 \times 2 \times 0,5 = 4$.

c) On résout $0,5x^2 - x = 7,5$, soit $x^2 - 2x - 15 = 0$. En testant des valeurs entières, $x = 5$ convient ($25 - 10 - 15 = 0$), et $-15 = 5 \times (-3)$ donne la factorisation

$$x^2 - 2x - 15 = (x - 5)(x + 3)$$

La solution -3 est exclue pour une longueur : $x = 5 \text{ m}$. Le caisson mesure 5 m sur 3 m sur 0,5 m, soit $7,5 \text{ m}^3$.

Réponse. a) $V(x) = 0,5x^2 - x$ · b) 4 m^3 · c) $x = 5 \text{ m}$.