

Plaquette 3 – Proportionnalité, échelles et mélanges

Automatismes — Première STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Le produit en croix. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, alors :

$$a \times d = b \times c$$

Le coefficient de proportionnalité. C'est le nombre par lequel on multiplie pour passer d'une grandeur à l'autre ; il a une **unité**.

Situation	Coefficient	Unité
prix et quantité	prix unitaire	€ par unité
masse et volume	masse volumique	kg/m ³
volume et durée	débit	m ³ /h
distance et durée	vitesse	km/h

Échelle d'un plan.

$$\text{échelle} = \frac{\text{longueur sur le plan}}{\text{longueur réelle}}$$

Une échelle $\frac{1}{50}$ signifie que 1 cm sur le plan vaut 50 cm en vrai.

Mélanges. On additionne les **quantités**, jamais les pourcentages :

$$\text{quantité totale} = q_1 + q_2 \quad \text{teneur} = \frac{q_1 + q_2}{m_1 + m_2}$$

Partage proportionnel. Pour partager S selon des parts a, b, c :

$$\frac{S}{a + b + c} \times a \quad \text{pour la première part}$$

⚠ Vérifier la proportionnalité : une consommation au 100 km l'est, une durée de chauffage souvent non.

⚠ Sur les aires, un facteur k sur les longueurs donne k^2 : ce n'est **pas** proportionnel à la longueur.

Correction de l'exercice 1 - Quatrième proportionnelle

On passe par le prix d'une pièce, $\frac{45}{12} = 3,75$ €.

a) $7 \times 3,75 = 26,25$ €. **Contrôle** par la quatrième proportionnelle : $\frac{7 \times 45}{12} = 26,25$.

b) $\frac{205,70}{3,75} \approx 54,85$: on ne vend pas une fraction de pièce, et le budget ne doit pas être dépassé, donc on arrondit **au-dessous** :

$$54 \times 3,75 = 202,50 \text{ €}$$

On peut acheter 54 **pièces** (il reste 3,20 €) ; 55 pièces coûteraient 206,25 €, plus que le budget.

Réponse. a) 26,25 € · b) 54 pièces (pour 202,50 €).

Correction de l'exercice 2 - Échelle d'un plan

À l'échelle $\frac{1}{50}$, 1 cm sur le plan représente 50 cm en réalité.

a) $3,4 \times 50 = 170 \text{ cm} = 1,70 \text{ m}$, une largeur de pièce plausible.

b) $12 \text{ m} = 1\,200 \text{ cm}$, donc sur le plan $\frac{1\,200}{50} = 24 \text{ cm}$.

L'échelle est une réduction ($\frac{1}{50} < 1$). Pour les aires, le facteur est 50^2 :

$$1 \text{ cm}^2 \text{ sur le plan} \leftrightarrow 2\,500 \text{ cm}^2 = 0,25 \text{ m}^2$$

Appliquer le facteur 50 aux aires serait une erreur.

Réponse. a) 1,70 m · b) 24 cm.

Correction de l'exercice 3 - Un alliage

a) La masse de cuivre est la teneur multipliée par la masse d'alliage : $0,18 \times 450 = 81 \text{ g}$ et $0,05 \times 300 = 15 \text{ g}$.

b) Le mélange contient $81 + 15 = 96 \text{ g}$ de cuivre pour 750 g en tout :

$$\frac{96}{750} = 0,128 = 12,8 \%$$

La moyenne simple $\frac{18 + 5}{2} = 11,5 \%$ serait fausse, car les masses ne sont pas égales.

Contrôle par pondération : $0,6 \times 18 + 0,4 \times 5 = 12,8$. Le résultat est plus proche de 18 %, car l'alliage riche est majoritaire.

Réponse. a) 81 g et 15 g · b) 12,8 %.

Correction de l'exercice 4 - Masse volumique

La masse est la masse volumique multipliée par le volume, en m^3 ; on convertit d'abord les dm^3 ($1 \text{ dm}^3 = 0,001 \text{ m}^3$).

a) $2\,700 \times 0,0035 = 9,45 \text{ kg}$.

b) Le volume est la masse divisée par la masse volumique : $\frac{9,45}{2\,700} = 0,0035 \text{ m}^3 = 3,5 \text{ dm}^3$, la réciproque de a).

c) $7\,800 \times 0,012 = 93,6 \text{ kg}$.

$$\frac{7\,800}{2\,700} \approx 2,89$$

À volume égal, l'acier pèse presque trois fois plus que l'aluminium. Repère : l'eau a une masse volumique de $1\,000 \text{ kg/m}^3$, soit 1 kg par litre.

Réponse. a) 9,45 kg · b) 3,5 dm^3 · c) 93,6 kg.

Correction de l'exercice 5 - Débit et durée

a) Le débit est le volume divisé par la durée : $\frac{2\,400}{8} = 300 \text{ L/min}$.

b) Le débit étant constant, le volume est proportionnel à la durée : $300 \times 15 = 4\,500 \text{ L}$.

c) $\frac{900}{300} = 3 \text{ minutes}$.

$$300 \text{ L/min} = 18\,000 \text{ L/h} = 18 \text{ m}^3/\text{h}$$

Une cuve de 30 m^3 se remplirait en $\frac{30\,000}{300} = 100 \text{ min}$, soit 1 h 40 min. Pour une cuve qui se vide par gravité, le débit diminue avec le niveau, et la proportionnalité ne s'applique

plus.

Réponse. a) 300 L/min · b) 4500 L · c) 3 minutes.

Correction de l'exercice 6 - Vitesse moyenne

a) La vitesse moyenne est la distance totale divisée par la durée totale :

$$v_m = \frac{120 + 180}{1,5 + 2} = \frac{300}{3,5} \approx 85,71 \text{ km/h}$$

b) Les deux vitesses valent $\frac{120}{1,5} = 80 \text{ km/h}$ et $\frac{180}{2} = 90 \text{ km/h}$, de moyenne simple 85 km/h. Ce n'est pas la bonne valeur : la seconde portion dure plus longtemps (2 h contre 1,5 h), sa vitesse pèse davantage. **Contrôle** par pondération :
 $\frac{1,5}{3,5} \times 80 + \frac{2}{3,5} \times 90 \approx 85,71$.

Réponse. a) $\approx 85,71 \text{ km/h}$ · b) la moyenne simple donne 85 km/h : elle est fausse ici.

Correction de l'exercice 7 - Partage proportionnel

Partager proportionnellement aux effectifs, c'est donner la même somme à chaque personne. Il y a $3 + 5 + 7 = 15$ personnes, et chacune reçoit

$$\frac{4\,500}{15} = 300 \text{ €}$$

Les parts valent donc $3 \times 300 = 900 \text{ €}$, $5 \times 300 = 1\,500 \text{ €}$ et $7 \times 300 = 2\,100 \text{ €}$.

Contrôle : $900 + 1\,500 + 2\,100 = 4\,500 \text{ €}$, et $\frac{900}{1\,500} = 0,6 = \frac{3}{5}$, le rapport des effectifs. Les parts représentent 20 %, environ 33,3 % et 46,7 % de la prime.

Réponse. 900 €, 1500 € et 2100 €.

Correction de l'exercice 8 - Consommation au 100 km

La consommation est proportionnelle à la distance : 6,4 L pour 100 km.

a) Sur 450 km : $\frac{6,4 \times 450}{100} = 28,8 \text{ L}$.

b) $28,8 \times 1,85 \approx 53,28 \text{ €}$, soit environ 0,118 € par kilomètre.

c) Avec 45 L :

$$d = \frac{100 \times 45}{6,4} \approx 703,1 \text{ km}$$

Contrôle : $\frac{703,1 \times 6,4}{100} \approx 45 \text{ L}$. En pratique, on ne vide pas le réservoir : on compte plutôt 650 km d'autonomie.

Réponse. a) 28,8 L · b) $\approx 53,28 \text{ €}$ · c) $\approx 703 \text{ km}$.

Correction de l'exercice 9 - Reconnaître la proportionnalité

Deux grandeurs sont proportionnelles si l'une s'obtient en multipliant l'autre par un même nombre : la valeur pour 0 est 0, et doubler l'une double l'autre.

a) $P = p \times n$, à prix unitaire fixe : **proportionnel** (sauf remise par quantité).

b) $A = c^2$: doubler le côté quadruple l'aire, **non proportionnel**.

c) $P = 4c$: **proportionnel**, de coefficient 4.

d) La consommation baisse puis remonte quand la vitesse augmente (minimum vers 70 à 90 km/h) : **non proportionnel**.

$$\frac{4c}{c} = 4 \text{ (constant)} \quad \frac{c^2}{c} = c \text{ (variable)}$$

Attention : un abonnement plus une consommation n'est pas proportionnel, car la valeur pour 0 n'est pas nulle.

Réponse. a) et c) oui · b) et d) non.

Correction de l'exercice 10 - Règle de trois composée

On passe par l'unité, une grandeur à la fois. Une machine produit $\frac{240}{5} = 48$ pièces en 4 h, donc $\frac{48}{4} = 12$ pièces par heure. Trois machines produisent 36 pièces par heure, et en 7 heures :

$$36 \times 7 = 252 \text{ pièces}$$

Contrôle par les coefficients : le nombre de machines est multiplié par $\frac{3}{5} = 0,6$ et la durée par $\frac{7}{4} = 1,75$, d'où $240 \times 0,6 \times 1,75 = 252$. Moins de machines, mais plus longtemps : la production change peu.

Réponse. 252 pièces.

Correction de l'exercice 11 - Repérer une erreur

L'échelle s'applique aux **longueurs** : 1 cm sur le plan représente 100 cm. Pour les aires, le facteur est $100^2 = 10\,000$:

$$2 \text{ cm}^2 \times 10\,000 = 20\,000 \text{ cm}^2 = 2 \text{ m}^2$$

L'élève a trouvé 200 cm², soit 2 dm², la taille d'une feuille de papier : absurde pour une pièce.

Contrôle : un carré d'aire 2 cm² a un côté d'environ 1,41 cm, soit 141 cm en réalité, et $141^2 \approx 19\,900 \text{ cm}^2$. Un facteur k sur les longueurs donne k^2 sur les aires et k^3 sur les volumes.

Réponse. Les aires sont multipliées par $100^2 = 10\,000$: la pièce fait 20 000 cm², soit 2 m².

Correction de l'exercice 12 - Deux échelles à comparer

a) L'échelle $\frac{1}{20}$ est plus grande que $\frac{1}{200}$: un même objet y est dix fois plus grand. Le plan **B** montre le plus de détails ; le plan A convient pour un bâtiment entier, B pour une pièce ou un détail technique.

b) Le mur mesure 800 cm :

$$\frac{800}{200} = 4 \text{ cm sur A} \quad \frac{800}{20} = 40 \text{ cm sur B}$$

Le rapport 10 est celui des échelles. Pour B, il faut une grande feuille (A3, voire A2), alors qu'un A4 suffit pour A.

Réponse. a) le plan B · b) 4 cm sur A, 40 cm sur B.

Correction de l'exercice 13 - Un mélange à doser

Notons x la masse, en grammes, d'alliage à 20 % ; celle de l'alliage à 8 % vaut $800 - x$. Le mélange doit contenir $0,15 \times 800 = 120 \text{ g}$ de cuivre :

$$0,2x + 0,08(800 - x) = 120 \Leftrightarrow 0,12x + 64 = 120 \Leftrightarrow x = \frac{56}{0,12} \approx 466,67$$

Il faut environ 466,67 g d'alliage à 20 % et 333,33 g d'alliage à 8 %.

Contrôle : $0,2 \times 466,67 + 0,08 \times 333,33 \approx 93,33 + 26,67 = 120$ g. La teneur visée, 15 %, est plus proche de 20 % : l'alliage riche est majoritaire.

Réponse. Environ 466,67 g à 20 % et 333,33 g à 8 %.

Correction de l'exercice 14 - Un coût proportionnel

a) Le prix est proportionnel à la longueur : $12,40 \times 85 = 1\,054$ €.

b) $\frac{1\,054}{12,40} = 85$ m, la réciproque de a).

c) On ramène le second câble au prix du mètre :

$$\frac{1\,054}{62} = 17 \text{ €/m}$$

Le **premier** câble est moins cher (12,40 €/m), d'environ 37 %. Les prix totaux sont égaux, mais la longueur obtenue ne l'est pas : 23 m de plus avec le premier. Cette comparaison n'a de sens qu'à section égale.

Réponse. a) 1054 € · b) 85 m · c) le premier (12,40 €/m contre 17 €/m).

Correction de l'exercice 15 - Une proportion à ajuster

a) $0,65 \times 1\,200 = 780$ pièces A et $1\,200 - 780 = 420$ pièces B, soit 35 %.

b) La nouvelle proportion vaut

$$\frac{900}{1\,200} = 0,75 = 75 \%$$

soit 10 points de plus. En valeur relative, la part de A augmente de $\frac{10}{65} \approx 15,4 \%$, alors que le nombre de pièces B baisse de $\frac{120}{420} \approx 28,6 \%$: B part d'un effectif plus petit, la même variation de 120 pièces y pèse davantage.

Réponse. a) 780 et 420 · b) 75 %, soit +10 points.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : un chantier

a) À l'échelle $\frac{1}{50}$: $12 \times 50 = 600$ cm = 6 m et $8 \times 50 = 400$ cm = 4 m. La dalle mesure 6 m sur 4 m, soit 24 m².

b) Le volume est l'aire multipliée par l'épaisseur, en mètres :

$$V = 24 \times 0,18 = 4,32 \text{ m}^3$$

c) $4,32 \times 145 = 626,40$ €, soit 26,10 € par m².

Contrôle par le facteur des aires : 96 cm^2 sur le plan $\times 2\,500 = 240\,000 \text{ cm}^2 = 24 \text{ m}^2$. Une épaisseur de 20 cm coûterait 696 €, soit 69,60 € de plus.

Réponse. a) 6 m sur 4 m · b) 4,32 m³ · c) 626,40 €.