

Plaquette 5 - Applications physiques et optimisation

Dérivation — Première STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Grandeurs et taux instantanés.

Grandeur	Sa dérivée
position $d(t)$	vitesse $v(t)$
vitesse $v(t)$	accélération $a(t)$
volume écoulé $V(t)$	débit $V'(t)$
énergie $E(t)$	puissance $E'(t)$
coût total $C(x)$	coût marginal $C'(x)$

La méthode d'optimisation.

Étape	Ce qu'on fait
1	nommer l'inconnue et écrire la contrainte
2	exprimer la grandeur à optimiser
3	préciser le domaine de validité
4	dériver, annuler, étudier le signe
5	conclure avec l'unité

Optimum d'une fonction du second degré. La dérivée est affine : on résout $f'(x) = 0$. Pour $A(x) = 45x - 1,5x^2$:

$$A'(x) = 45 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = 15$$

Domaine de validité. Une longueur, une aire, un débit sont positifs : il faut restreindre x et vérifier que l'optimum y appartient.

Sur un intervalle fermé. Si la dérivée ne s'annule pas dedans, l'optimum est à une **borne**.

⚠ Une solution mathématique doit toujours passer le test du contexte : pas de longueur négative, pas de production fractionnaire quand elle doit être entière.

Correction de l'exercice 1 - Position, vitesse, accélération

a) La vitesse est la dérivée de la position : $v(t) = 3t^2 - 12t + 12 = 3(t^2 - 4t + 4)$. On reconnaît l'identité $(t - 2)^2$:

$$v(t) = 3(t - 2)^2$$

b) $v(0) = 3 \times 4 = 12$ m/s, $v(2) = 0$ m/s et $v(4) = 3 \times 4 = 12$ m/s.

c) $v(t)$ est le produit de 3 par un carré : elle est toujours positive ou nulle. Le mobile **ne recule jamais** ; il s'arrête un instant à $t = 2$ s, à la position $d(2) = 8 - 24 + 24 = 8$ m, puis repart dans le même sens.

En dérivant la vitesse, on obtient l'accélération $6t - 12$: négative avant 2 s (le mobile freine), nulle à 2 s, positive après (il accélère).

Réponse. a) $v(t) = 3(t - 2)^2$ · b) 12 ; 0 ; 12 m/s · c) non, la vitesse reste positive ou nulle.

Correction de l'exercice 2 - Une boîte à volume maximal

a) Après découpe, la base est un carré de côté $24 - 2x$ et la hauteur vaut x , avec $0 < x < 12$. Donc $V(x) = x(24 - 2x)^2 = x(576 - 96x + 4x^2) = 4x^3 - 96x^2 + 576x$.

b) $V'(x) = 12x^2 - 192x + 576 = 12(x^2 - 16x + 48)$. On teste $x = 4$: $16 - 64 + 48 = 0$; et $x = 12$: $144 - 192 + 48 = 0$. D'où

$$V'(x) = 12(x - 4)(x - 12)$$

Sur $]0 ; 4[$ les deux facteurs sont négatifs et $V' > 0$; sur $]4 ; 12[$, $V' < 0$. Le volume est maximal pour $x = 4$ cm : la base mesure 16 cm de côté et $V(4) = 4 \times 256 = 1\,024$ cm³.

Contrôles : $V(3) = 3 \times 18^2 = 972$ cm³ et $V(5) = 5 \times 14^2 = 980$ cm³, tous deux plus petits. La valeur 12 est exclue : la base serait réduite à un point.

Réponse. a) $V(x) = 4x^3 - 96x^2 + 576x$ · b) 1024 cm³ pour $x = 4$ cm.

Correction de l'exercice 3 - Un enclos compartimenté

a) Avec la cloison, le grillage compte trois largeurs et deux longueurs : $3x + 2y = 90$, d'où $y = \frac{90 - 3x}{2}$. L'aire vaut

$$A(x) = x \times \frac{90 - 3x}{2} = 45x - 1,5x^2$$

pour $0 < x < 30$.

b) $A'(x) = 45 - 3x$ s'annule en $x = 15$, positive avant et négative après : c'est un maximum. La longueur vaut alors $\frac{90 - 45}{2} = 22,5$ m et l'aire $15 \times 22,5 = 337,5$ m².

Contrôles : $A(10) = 450 - 150 = 300$ et $A(20) = 900 - 600 = 300$, symétriques autour de 15. Sans cloison, $A(x) = x(45 - x)$ serait maximale pour $x = 22,5$ avec 506,25 m² : la cloison coûte environ 169 m².

Réponse. a) $A(x) = 45x - 1,5x^2$ · b) 337,5 m², pour 15 m sur 22,5 m.

Correction de l'exercice 4 - Un coût à minimiser

a) $C'(x) = 3x^2 - 30x + 63 = 3(x^2 - 10x + 21)$. Les racines évidentes sont 3 ($9 - 30 + 21 = 0$) et 7 ($49 - 70 + 21 = 0$) :

$$C'(x) = 3(x - 3)(x - 7)$$

b) C' est positive à l'extérieur de 3 et 7, négative entre (contrôles : $C'(0) = 63$, $C'(5) = -12$). Maximum local en 3 : $C(3) = 27 - 135 + 189 + 50 = 131$ €. Minimum local en 7 : $C(7) = 343 - 735 + 441 + 50 = 99$ €.

Ce minimum n'est que **local** : $C(0) = 50$ € est plus bas. Sur $[2 ; 10]$, on compare avec les bornes $C(2) = 8 - 60 + 126 + 50 = 124$ € et $C(10) = 1\,000 - 1\,500 + 630 + 50 = 180$ € : le minimum sur cet intervalle est bien 99 €, atteint en $x = 7$.

Réponse. a) $3(x - 3)(x - 7)$ · b) maximum local 131 € en 3, minimum local 99 € en 7.

Correction de l'exercice 5 - Une puissance transmise

a) $P'(x) = 12 - 0,6x$ s'annule quand $0,6x = 12$, soit $x = 20$; elle est positive avant et négative après, donc P admet un maximum :

$$P(20) = 240 - 0,3 \times 400 = 240 - 120 = 120 \text{ W}$$

b) On factorise : $P(x) = x(12 - 0,3x)$, qui s'annule en 0 et en 40 (car $0,3x = 12$ donne $x = 40$). Avec le coefficient $-0,3 < 0$, la parabole est tournée vers le bas : la puissance est positive **entre** les racines, pour $x \in]0 ; 40[$.

Contrôles : $P(10) = 120 - 30 = 90$ W et $P(30) = 360 - 270 = 90$ W, symétriques autour de 20, milieu de 0 et 40. Au-delà de 40, la puissance serait négative : le modèle n'a plus de sens physique.

Réponse. a) 120 W pour $x = 20$ · b) $x \in]0 ; 40[$.

Correction de l'exercice 6 - Une distance de freinage

a) $d(50) = 0,006 \times 2\,500 + 10 = 15 + 10 = 25$ m et
 $d(90) = 0,006 \times 8\,100 + 18 = 48,6 + 18 = 66,6$ m. La vitesse est multipliée par 1,8, la distance par environ 2,66 : elle croît plus vite que la vitesse, à cause du terme en v^2 .

b) $d'(v) = 0,012v + 0,2$, donc

$$d'(90) = 1,08 + 0,2 = 1,28 \text{ m par km/h}$$

À 90 km/h, chaque km/h supplémentaire allonge la distance d'arrêt d'environ 1,28 m. À 50 km/h, ce surcoût n'est que de $d'(50) = 0,8$ m par km/h : il grandit avec la vitesse. À 130 km/h, $d(130) = 101,4 + 26 = 127,4$ m, soit environ 60,8 m de plus qu'à 90 km/h.

Réponse. a) 25 m et 66,6 m · b) 1,28 m par km/h supplémentaire.

Correction de l'exercice 7 - Une consommation minimale

a) $c'(v) = 0,006v - 0,3$ s'annule quand $0,006v = 0,3$:

$$v = \frac{0,3}{0,006} = 50 \text{ km/h}$$

La dérivée, affine de coefficient positif, est négative avant 50 et positive après : la consommation passe par un **minimum**.

b) $c(50) = 0,003 \times 2\,500 - 15 + 12 = 7,5 - 15 + 12 = 4,5$ L aux 100 km.

Contrôles : $c(40) = 4,8 - 12 + 12 = 4,8$ et $c(60) = 10,8 - 18 + 12 = 4,8$, images égales de part et d'autre de 50 et supérieures à 4,5. À 130 km/h, $c(130) = 50,7 - 39 + 12 = 23,7$ L, environ 5,3 fois le minimum. Ce modèle ne vaut pas pour les très basses vitesses.

Réponse. a) 50 km/h · b) 4,5 L aux 100 km.

Correction de l'exercice 8 - Un débit à optimiser

a) $D'(t) = -3t^2 + 18t - 15 = -3(t^2 - 6t + 5)$. Les racines évidentes sont 1 ($1 - 6 + 5 = 0$) et 5 ($25 - 30 + 5 = 0$) :

$$D'(t) = -3(t - 1)(t - 5)$$

b) À cause du facteur -3 , D' est négative à l'extérieur de 1 et 5, positive entre (contrôles : $D'(0) = -15$, $D'(3) = 12$). Minimum local en 1 : $D(1) = -1 + 9 - 15 + 20 = 13$ L/min. Maximum local en 5 : $D(5) = -125 + 225 - 75 + 20 = 45$ L/min.

Aux bornes de $[0 ; 7]$: $D(0) = 20$ et $D(7) = -343 + 441 - 105 + 20 = 13$ L/min. Sur l'intervalle, le débit maximal est 45 L/min en $t = 5$, et le minimum 13 L/min est atteint deux fois, en $t = 1$ et $t = 7$.

Réponse. a) $-3(t - 1)(t - 5)$ · b) minimum 13 L/min en $t = 1$, maximum 45 L/min en $t = 5$.

Correction de l'exercice 9 - Un temps de parcours

a) $T(100) = 3 + 2,5 = 5,5$ h, $T(110) = \frac{300}{110} + \frac{110}{40} \approx 2,727 + 2,75 \approx 5,477$ h et $T(120) = 2,5 + 3 = 5,5$ h.

b) Le temps baisse de 100 à 110 puis remonte, avec des valeurs égales en 100 et 120 : le minimum est entre les deux, autour de 110.

La formule additionne un terme qui diminue quand v augmente ($\frac{300}{v}$) et un terme qui augmente ($\frac{v}{40}$). Le minimum se trouve là où ils s'équilibrent :

$$\frac{300}{v} = \frac{v}{40} \Leftrightarrow v^2 = 12\,000 \Leftrightarrow v \approx 109,5 \text{ km/h}$$

Contrôle : $\frac{300}{109,5} \approx 2,740$ et $\frac{109,5}{40} \approx 2,738$, presque égaux, pour un temps d'environ 5,477 h.

Réponse. a) 5,5 h ; $\approx 5,477$ h ; 5,5 h · b) vers $v \approx 109,5$ km/h.

Correction de l'exercice 10 - Repérer une erreur

Le calcul $V'(12) = 0$ est juste, puisque $V(x) = 12(x - 4)(x - 12)$. Mais la conclusion est fausse, pour deux raisons.

D'abord, 12 n'appartient pas au domaine $]0; 12[$: la base aurait un côté $24 - 2 \times 12 = 0$ et le volume serait nul. Ce serait plutôt un minimum qu'un maximum !

Ensuite, l'élève n'a pas étudié le **signe** de V' . Sur $]0; 4[$, $V'(1) = 12 \times (-3) \times (-11) = 396 > 0$; sur $]4; 12[$, $V'(8) = 12 \times 4 \times (-4) = -192 < 0$. Le maximum est donc atteint en $x = 4$:

$$V(4) = 1\,024 \text{ cm}^3$$

À retenir : annuler la dérivée ne suffit pas ; il faut vérifier le changement de signe, l'appartenance au domaine, puis calculer la valeur obtenue.

Réponse. $x = 12$ donne un volume **nul** et est hors du domaine : le maximum est en $x = 4$, avec 1024 cm^3 .

Correction de l'exercice 11 - Une section optimale

a) Les deux côtés relevés mesurent x , le fond $30 - 2x$, avec $0 < x < 15$. La section est un rectangle :

$$S(x) = x(30 - 2x) = -2x^2 + 30x$$

b) $S'(x) = -4x + 30$ s'annule pour $x = 7,5$ cm, positive avant et négative après : c'est un maximum. Le fond mesure alors $30 - 15 = 15$ cm et la section vaut $7,5 \times 15 = 112,5 \text{ cm}^2$.

Contrôles : $S(5) = 5 \times 20 = 100$ et $S(10) = 10 \times 10 = 100 \text{ cm}^2$, symétriques autour de 7,5 et inférieurs à 112,5. La section optimale est deux fois plus large que haute. Comme le débit d'une gouttière est proportionnel à sa section, c'est aussi ce pli qui évacue le plus d'eau.

Réponse. a) $S(x) = -2x^2 + 30x$ · b) $112,5 \text{ cm}^2$, pour $x = 7,5$ cm.

Correction de l'exercice 12 - Un optimum hors domaine

a) Sans contrainte, $P'(x) = 12 - 0,6x$ s'annule en $x = 20$, où $P(20) = 240 - 120 = 120 \text{ W}$: c'est le maximum.

b) Mais x est limité à $15 < 20$: le maximum théorique est hors du domaine. Sur $]0 ; 15]$, $P'(x) = 12 - 0,6x \geq 12 - 9 = 3 > 0$, donc P est croissante sur tout l'intervalle et son maximum est atteint à la borne :

$$P(15) = 180 - 0,3 \times 225 = 180 - 67,5 = 112,5 \text{ W}$$

Le manque à gagner est de 7,5 W, soit 6,25 % de 120. **Contrôle** :

$P(14) = 168 - 58,8 = 109,2 \text{ W} < 112,5$. Porter la limite à 18 donnerait $216 - 97,2 = 118,8 \text{ W}$, soit 6,3 W de plus. Sur un intervalle borné, l'optimum peut être une borne.

Réponse. a) 120 W en $x = 20$ · b) 112,5 W en $x = 15$.

Correction de l'exercice 13 - Une énergie et sa puissance

a) La puissance est la dérivée de l'énergie : $3 \times 0,5 = 1,5$ et $-3 \times 2 = -6$, donc

$$E'(t) = 1,5t^2 - 6t + 12$$

en kilojoules par seconde, c'est-à-dire en kilowatts.

b) E' est une fonction du second degré de coefficient $1,5 > 0$: sa parabole est tournée vers le haut. On cherche deux instants de même puissance :

$E'(t) = 12 \Leftrightarrow 1,5t^2 - 6t = 0 \Leftrightarrow 1,5t(t - 4) = 0$, soit $t = 0$ ou $t = 4$. Le minimum est au milieu, en $t = 2$ s, et vaut $E'(2) = 6 - 12 + 12 = 6 \text{ kW}$.

Ce minimum est positif : la puissance ne s'annule jamais et l'énergie consommée augmente toujours. En 4 s, $E(4) = 32 - 48 + 48 = 32 \text{ kJ}$, soit une puissance moyenne de 8 kW.

Réponse. a) $E'(t) = 1,5t^2 - 6t + 12$ · b) 6 kW à $t = 2$ s.

Correction de l'exercice 14 - Deux réglages à comparer

a) $P_A'(x) = 16 - 0,8x$ s'annule en $x = 20$, d'où le maximum $P_A(20) = 320 - 160 = 160 \text{ W}$. $P_B'(x) = 20 - 1,6x$ s'annule en $x = 12,5$, d'où $P_B(12,5) = 250 - 125 = 125 \text{ W}$. Dans les deux cas, la dérivée passe de + à -.

b) Le réglage A a le meilleur maximum, mais il faut atteindre $x = 20$. À faible régime, B l'emporte : $P_B(5) = 80 \text{ W}$ contre $P_A(5) = 70 \text{ W}$. On cherche où les deux puissances sont égales :

$$16x - 0,4x^2 = 20x - 0,8x^2 \Leftrightarrow 0,4x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow 0,4x(x - 10) = 0$$

Les courbes se croisent en $x = 10$ (contrôle : 120 W pour les deux). Le réglage B est meilleur sous $x = 10$, le réglage A au-delà : le choix dépend de la plage de fonctionnement.

Réponse. a) 160 W en $x = 20$ pour A, 125 W en $x = 12,5$ pour B · b) B sous $x = 10$, A au-delà.

Correction de l'exercice 15 - Une contrainte de production

a) $B'(x) = -3x^2 + 36x - 60 = -3(x^2 - 12x + 20)$. Les racines évidentes sont 2 ($4 - 24 + 20 = 0$) et 10 ($100 - 120 + 20 = 0$) :

$$B'(x) = -3(x - 2)(x - 10)$$

b) B' est négative à l'extérieur de 2 et 10, positive entre (contrôles : $B'(0) = -60$, $B'(6) = 48$). Minimum local $B(2) = -8 + 72 - 120 = -56 \text{ €}$; maximum local $B(10) = -1\,000 + 1\,800 - 600 = 200 \text{ €}$. Aux bornes, $B(0) = 0$ et $B(12) = -1\,728 + 2\,592 - 720 = 144 \text{ €}$.

Parmi 0 ; -56 ; 200 ; 144, le bénéfice maximal est 200 €, pour $x = 10$. Par balayage, $B(4,4) \approx -0,7$ et $B(4,5) \approx 3,4$: le bénéfice devient positif entre 4,4 et 4,5, et le reste

jusqu'à 12.

Réponse. a) $-3(x-2)(x-10)$ · b) 200 € pour $x = 10$.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : un réservoir

La contrainte $x + h = 9$ donne la hauteur $h = 9 - x$, avec $0 < x < 9$.

a) Le volume est l'aire de la base carrée multipliée par la hauteur :

$$V(x) = x^2(9 - x) = 9x^2 - x^3.$$

b) $V'(x) = 18x - 3x^2$, que l'on factorise par $3x$:

$$V'(x) = 3x(6 - x)$$

Sur $]0; 6[$, les deux facteurs sont positifs ($V'(3) = 27$) ; sur $]6; 9[$, $6 - x$ est négatif ($V'(8) = -48$). Le volume est maximal pour $x = 6$ m, avec une hauteur $h = 3$ m et $V(6) = 36 \times 3 = 108 \text{ m}^3$.

Contrôles : $V(5) = 25 \times 4 = 100 \text{ m}^3$ et $V(7) = 49 \times 2 = 98 \text{ m}^3$, tous deux plus petits. Le réservoir optimal a une base de côté double de sa hauteur.

Réponse. a) $V(x) = 9x^2 - x^3$ · b) 108 m^3 , pour $x = 6$ m et $h = 3$ m.