

Plaquette 3 - Dériver et écrire une tangente

Dérivation — Première STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Dérivées de référence.

Fonction	Dérivée
k	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$

Opérations.

$$(u + v)' = u' + v' \quad (ku)' = k u'$$

Dériver un polynôme.

$$(ax^3 + bx^2 + cx + d)' = 3ax^2 + 2bx + c$$

Équation de la tangente en a .

$$y = f(a)(x - a) + f(a)$$

Étape	Ce qu'on fait
1	calculer $f(a)$
2	dériver, puis calculer $f'(a)$
3	substituer et développer

Tangente horizontale. $f'(a) = 0$: son équation est $y = f(a)$.

Tangente parallèle à une droite de pente m . On résout $f'(x) = m$.

Trois pièges.

⚠ La constante disparaît : $(x^2 + 7)' = 2x$.

⚠ Le coefficient se conserve : $(5x^3)' = 15x^2$.

⚠ $f(a)$ est une hauteur, $f'(a)$ une pente.

Correction de l'exercice 1 - Dériver des polynômes

On dérive terme à terme avec $(x^3)' = 3x^2$, $(x^2)' = 2x$, $(x)' = 1$, la dérivée d'une constante étant nulle ; un coefficient multiplicatif se conserve.

a) $f(x) = 3x^2 - 6 \times 2x + 9 = 3x^2 - 12x + 9$.

b) Le coefficient 2 se multiplie par 3 :

$$g'(x) = 2 \times 3x^2 - 3 \times 2x - 12 = 6x^2 - 6x - 12$$

c) $0,5 \times 3 = 1,5$ et $-2 \times 2 = -4$: $h'(x) = 1,5x^2 - 4x + 3$.

Contrôles : $f(1) = 3 - 12 + 9 = 0$, $g'(2) = 24 - 12 - 12 = 0$, $h'(1) = 1,5 - 4 + 3 = 0,5$. Les pièges classiques : oublier le facteur 2 en b), ce qui donnerait $3x^2$, ou oublier de

multiplier 0,5 par 3 en c).

Réponse. a) $3x^2 - 12x + 9$ · b) $6x^2 - 6x - 12$ · c) $1,5x^2 - 4x + 3$.

Correction de l'exercice 2 - Calculer des nombres dérivés

La dérivée vaut $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$. On remplace x par chaque valeur :

- $f'(0) = 9$, positif ;
- $f'(1) = 3 - 12 + 9 = 0$;
- $f'(2) = 12 - 24 + 9 = -3$, négatif ;
- $f'(3) = 27 - 36 + 9 = 0$.

$$f'(1) = f'(3) = 0 \quad f'(2) = -3 < 0$$

Les tangentes sont horizontales en $x = 1$ et $x = 3$. Entre les deux, la dérivée est négative, et $f'(4) = 48 - 48 + 9 = 9 > 0$ au-delà : f est croissante, puis décroissante, puis croissante. Elle admet un maximum local en 1, $f(1) = 1 - 6 + 9 + 2 = 6$, et un minimum local en 3, $f(3) = 27 - 54 + 27 + 2 = 2$.

Réponse. 9 ; 0 ; -3 ; 0.

Correction de l'exercice 3 - Équation de tangente

On calcule l'image et le nombre dérivé, puis on applique $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

$f(3) = 9 - 12 + 7 = 4$ et $f'(x) = 2x - 4$ donne $f'(3) = 2$. La tangente a pour équation $y = 2(x - 3) + 4$, soit

$$y = 2x - 2$$

Contrôle : en $x = 3$, $6 - 2 = 4 = f(3)$, et la pente vaut bien 2.

Position : en $x = 4$, la courbe vaut $16 - 16 + 7 = 7$ et la tangente 6 ; en $x = 2$, la courbe vaut 3 et la tangente 2. La courbe est au-dessus de la tangente des deux côtés : la différence vaut $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$, toujours positive, ce qui est le cas pour une parabole tournée vers le haut.

Réponse. $y = 2x - 2$.

Correction de l'exercice 4 - Tangentes horizontales

a) $g'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2)$. On cherche des racines évidentes parmi les petits entiers : $x = 2$ donne $4 - 2 - 2 = 0$, et $x = -1$ donne $1 + 1 - 2 = 0$. Un trinôme a au plus deux racines, d'où la factorisation, que l'on vérifie en développant :

$$g'(x) = 6(x - 2)(x + 1)$$

Les solutions de $g'(x) = 0$ sont $x = 2$ et $x = -1$.

b) Une tangente horizontale a pour équation $y = g(a)$. On calcule $g(-1) = -2 - 3 + 12 + 5 = 12$ et $g(2) = 16 - 12 - 24 + 5 = -15$: les tangentes horizontales sont $y = 12$ et $y = -15$.

Comme $g'(-1) = -12 < 0$ et $g'(3) = 24 > 0$, la dérivée est positive, négative, puis positive : maximum local 12 en -1, minimum local -15 en 2.

Réponse. a) $x = -1$ et $x = 2$ · b) $y = 12$ et $y = -15$.

Correction de l'exercice 5 - Tangente parallèle à une droite

Deux droites sont parallèles lorsqu'elles ont le même coefficient directeur. On cherche donc les points où $f'(x) = 9$:

$$3x^2 - 12x + 9 = 9 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 4) = 0$$

d'où $x = 0$ ou $x = 4$.

$f(0) = 2$ et $f(4) = 64 - 96 + 36 + 2 = 6$: les points sont $(0; 2)$ et $(4; 6)$. Les tangentes ont pour équations $y = 9x + 2$ et $y = 9(x - 4) + 6 = 9x - 30$.

Aucune ne coïncide avec la droite $y = 9x - 4$, puisque les ordonnées à l'origine diffèrent (2 et -30 contre -4). Les deux tangentes sont parallèles entre elles, séparées verticalement de 32 . Pour une pente nulle, on trouverait $x = 1$ et $x = 3$.

Réponse. Aux points $(0; 2)$ et $(4; 6)$, de tangentes $y = 9x + 2$ et $y = 9x - 30$.

Correction de l'exercice 6 - Tangente à un cube

a) $f(2) = 8$ et $f(x) = 3x^2$ donne $f'(2) = 12$. La tangente a pour équation $y = 12(x - 2) + 8$, soit

$$y = 12x - 16$$

b) En $x = 3$, la courbe vaut 27 et la tangente $36 - 16 = 20$; en $x = -1$, la courbe vaut -1 et la tangente -28 . La courbe est au-dessus dans les deux cas.

Pour conclure partout, on étudie la différence $x^3 - 12x + 16$. Elle s'annule en $x = 2$, point de contact, et l'on vérifie en développant que

$$x^3 - 12x + 16 = (x - 2)^2(x + 4)$$

Le carré est positif : la différence a le signe de $x + 4$. La courbe est au-dessus de la tangente pour $x > -4$ et en dessous pour $x < -4$; la tangente recoupe la courbe au point d'abscisse -4 (contrôle : $-64 + 48 + 16 = 0$).

Réponse. a) $y = 12x - 16$ · b) la courbe est au-dessus dans les deux cas.

Correction de l'exercice 7 - Dériver une formule physique

a) La vitesse est la dérivée de la position : $d'(t) = 2 \times 4,905t = 9,81t$, donc à 2 s,
 $v(2) = 9,81 \times 2 = 19,62$ m/s

soit environ $70,6$ km/h.

b) $d(4) = 4,905 \times 16 = 78,48$ m. La vitesse moyenne sur ces 4 s vaut $\frac{78,48}{4} = 19,62$ m/s : c'est la vitesse à 2 s, milieu de $[0; 4]$, comme pour toute position du second degré.

c) L'accélération est la dérivée de la vitesse : $(9,81t)' = 9,81$ m/s². Elle est constante : c'est l'accélération de la pesanteur, et la vitesse croît linéairement.

La distance est proportionnelle à t^2 : en 1 s on tombe de $4,905$ m, en 2 s de $19,62$ m, quatre fois plus.

Réponse. a) $19,62$ m/s · b) $78,48$ m · c) $9,81$ m/s².

Correction de l'exercice 8 - Retrouver des coefficients

On traduit chaque information par une équation. $f(1) = 2$ donne $a + b = 2$. La dérivée vaut $f(x) = 3ax^2 + b$, et une tangente horizontale en 1 signifie $f'(1) = 0$, soit $3a + b = 0$.

En soustrayant la première équation de la seconde, on élimine b :

$$2a = -2 \Leftrightarrow a = -1 \quad \text{puis} \quad b = 2 - a = 3$$

La fonction est $f(x) = -x^3 + 3x$.

Contrôle : $f(1) = -1 + 3 = 2$ et $f(x) = -3x^2 + 3$ donne $f'(1) = 0$. La dérivée s'annule aussi en $x = -1$, avec $f(-1) = -2$. Comme $f'(0) = 3 > 0$ et $f'(2) = -9 < 0$, f admet un maximum

local 2 en 1 et un minimum local -2 en -1 .

Réponse. $a = -1$ et $b = 3$, soit $f(x) = -x^3 + 3x$.

Correction de l'exercice 9 - Deux tangentes parallèles

a) $f(x) = 3x^2 - 3$, donc $f(2) = 12 - 3 = 9$ et $f(-2) = 12 - 3 = 9$: le carré efface le signe.

b) Les deux tangentes ont le même coefficient directeur : elles sont **parallèles**. Il reste à savoir si elles sont confondues.

c) $f(2) = 8 - 6 = 2$ et $f(-2) = -8 + 6 = -2$. Les équations sont

$$y = 9(x - 2) + 2 = 9x - 16 \quad y = 9(x + 2) - 2 = 9x + 16$$

Les ordonnées à l'origine diffèrent ($-16 \neq 16$) : les tangentes sont parallèles et **distinctes**. La courbe est symétrique par rapport à l'origine ($f(-x) = -f(x)$), ce qui explique ces pentes égales. Les tangentes horizontales sont en $3x^2 = 3$, soit $x = 1$ et $x = -1$, aux points d'ordonnées -2 et 2 .

Réponse. a) $f(2) = f(-2) = 9$ · b) parallèles · c) $y = 9x - 16$ et $y = 9x + 16$.

Correction de l'exercice 10 - Repérer une erreur

On dérive terme à terme, en multipliant chaque coefficient par l'exposant, puis en diminuant l'exposant de 1.

— $4x^3$ donne $4 \times 3x^2 = 12x^2$, et non $3x^2$: l'élève a perdu le coefficient 4.

— $-2x^2$ donne $-2 \times 2x = -4x$, et non $-2x$: le facteur 2 manque.

— La constante 7 a pour dérivée 0 : elle devait disparaître.

$$f(x) = 12x^2 - 4x$$

Contrôles : $f(0) = 0$ et $f(1) = 12 - 4 = 8$, alors que la réponse de l'élève donnerait 7 et 8. Les tangentes horizontales sont aux points où $4x(3x - 1) = 0$, soit $x = 0$ et $x = \frac{1}{3}$. Pour éviter ces erreurs, on dérive en colonne, terme par terme, en vérifiant chaque coefficient.

Réponse. $f(x) = 12x^2 - 4x$: le 4 et le facteur 2 manquaient, et la constante devait disparaître.

Correction de l'exercice 11 - Une tangente qui passe par un point

La tangente en a a pour équation $y = f(a)(x - a) + f(a)$, avec $f(a) = a^2$ et $f'(a) = 2a$:

$$y = 2a(x - a) + a^2 = 2ax - a^2$$

Elle passe par $(0; -4)$ lorsque, pour $x = 0$, on obtient $y = -4$: $-a^2 = -4$, soit $a^2 = 4$, donc $a = 2$ ou $a = -2$.

Les tangentes sont $y = 4x - 4$ (contact en $(2; 4)$) et $y = -4x - 4$ (contact en $(-2; 4)$) ; toutes deux valent bien -4 en $x = 0$. Elles sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. Ce calcul n'aboutit que si le point est sous la parabole : pour $(0; 1)$, on obtiendrait $-a^2 = 1$, sans solution.

Réponse. Oui, pour $a = 2$ et $a = -2$: les tangentes $y = 4x - 4$ et $y = -4x - 4$.

Correction de l'exercice 12 - Dériver une somme de termes

On dérive chaque terme séparément ; une constante a une dérivée nulle.

a) $3 \times 3x^2 + 5 \times 2x - 2$, soit $f(x) = 9x^2 + 10x - 2$.

b) $g'(x) = -3x^2 + 4$.

c) $0,2 \times 3 = 0,6$ et $-1,5 \times 2 = -3$:

$$h'(x) = 0,6x^2 - 3x = 0,6x(x - 5)$$

Cette forme factorisée montre que h' s'annule en 0 et en 5 ; contrôle : $h'(5) = 15 - 15 = 0$.

Autres contrôles : $f'(0) = -2$ et $g'(0) = 4$, les coefficients de x dans f et g . La dérivée de $b)$ s'annule quand $3x^2 = 4$, soit $x = \pm\sqrt{\frac{4}{3}} \approx \pm 1,155$.

Réponse. a) $9x^2 + 10x - 2$ · b) $-3x^2 + 4$ · c) $0,6x^2 - 3x$.

Correction de l'exercice 13 - Une approximation en physique

a) La dérivée d'une constante est nulle et celle de $0,4t$ vaut 0,4 :

$$R'(t) = 0,4$$

b) R' s'exprime en ohms par degré : la résistance augmente de $0,4 \Omega$ à chaque degré supplémentaire, quelle que soit la température. Le modèle est affine, la courbe est une droite qui est sa propre tangente. Rapporté à $R(0) = 100 \Omega$, cela fait 0,4 % par degré.

c) $R(25) = 100 + 0,4 \times 25 = 110 \Omega$, soit une hausse de 10 % (contrôle : $25 \times 0,4 \% = 10 \%$).

La résistance atteint 130Ω lorsque $0,4t = 30$, soit $t = 75^\circ\text{C}$. Avec un modèle du second degré, la pente changerait avec la température ; ici elle est fixe.

Réponse. a) $R'(t) = 0,4$ · b) $+0,4 \Omega$ par degré · c) 110Ω .

Correction de l'exercice 14 - Position d'une courbe

a) On réduit la différence entre la fonction et la tangente :

$$f(x) - (2x - 2) = x^2 - 4x + 7 - 2x + 2 = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$$

Un carré est positif ou nul, et il ne s'annule qu'en $x = 3$.

b) Pour tout x , $f(x) \geq 2x - 2$: la courbe est **au-dessus** de sa tangente, et ne la touche qu'au point de contact d'abscisse 3.

Contrôles : en $x = 5$, la courbe vaut $25 - 20 + 7 = 12$ et la tangente 8, écart $4 = (5 - 3)^2$; en $x = 0$, 7 contre -2 , écart $9 = (0 - 3)^2$. Cette position s'explique par la forme de la parabole, tournée vers le haut ; pour une parabole tournée vers le bas, la courbe serait sous ses tangentes.

Réponse. a) $(x - 3)^2 \geq 0$ · b) la courbe est toujours au-dessus, avec contact en $x = 3$.

Correction de l'exercice 15 - Un débit à dériver

a) Le débit est la dérivée du volume. $0,5 \times 3 = 1,5$ et $-6 \times 2 = -12$:

$$V'(t) = 1,5t^2 - 12t + 30$$

b) $V'(2) = 6 - 24 + 30 = 12 \text{ L/min}$ et $V'(6) = 54 - 72 + 30 = 12 \text{ L/min}$.

c) Le débit est une fonction du second degré de coefficient $1,5 > 0$: sa parabole est tournée vers le haut et admet un minimum. Comme $V'(2) = V'(6)$, elle est symétrique par rapport à la droite $t = 4$, milieu de 2 et 6 : le minimum est atteint en $t = 4 \text{ min}$ et vaut $V'(4) = 24 - 48 + 30 = 6 \text{ L/min}$.

Ce minimum étant positif, le débit ne s'annule jamais : le volume écoulé augmente toujours. À 4 min, il vaut $V(4) = 32 - 96 + 120 = 56 \text{ L}$.

Réponse. a) $V'(t) = 1,5t^2 - 12t + 30$ · b) 12 L/min dans les deux cas · c) à $t = 4 \text{ min}$, avec 6 L/min .

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : trois tangentes

a) $f(x) = 3x^2 - 6x$, que l'on factorise par $3x$: $f(x) = 3x(x - 2)$.

b) Pour chaque abscisse, on calcule l'image et le nombre dérivé, puis $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

En $x = 0$: $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$, tangente horizontale $y = 0$.

En $x = 1$: $f(1) = 1 - 3 + 0 = -2$ et $f'(1) = 3 - 6 = -3$, d'où
$$y = -3(x - 1) - 2 = -3x + 1$$

En $x = 2$: $f(2) = 8 - 12 + 0 = -4$ et $f'(2) = 0$, tangente horizontale $y = -4$.

D'après la forme factorisée, f est positive avant 0, négative entre 0 et 2, positive après : maximum local 0 en 0, minimum local -4 en 2. Comme $f(0) = f(2)$, la pente est la plus négative au milieu, en $x = 1$.

Réponse. a) $f(x) = 3x^2 - 6x$ · b) $y = 0$; $y = -3x + 1$; $y = -4$.