

# Plaquette 1 - Nombre dérivé, tangente et variations

## Dérivation — Première STI2D

Corrections détaillées

### Boîte à outils

#### Formules du cours.

- **Taux de variation** entre  $a$  et  $b$  :  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ . C'est le coefficient directeur de la **corde**.
- Le **nombre dérivé**  $f'(a)$  est le coefficient directeur de la **tangente** à la courbe au point d'abscisse  $a$ .
- **Équation de la tangente** :  

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$
- Dérivées usuelles :  $(k)' = 0$ ,  $(x)' = 1$ ,  $(x^2)' = 2x$ ,  $(x^3)' = 3x^2$ .
- Opérations :  $(u + v)' = u' + v'$  et  $(ku)' = k u'$ .
- **Variations** :  $f' > 0$  sur un intervalle  $\Rightarrow f$  **croissante** ;  $f' < 0 \Rightarrow f$  **décroissante** ; un **extremum** apparaît là où  $f'$  s'annule en changeant de signe.
- Tangente **horizontale**  $\Leftrightarrow f'(a) = 0$ .
- Interprétation physique : si  $f$  donne une position en fonction du temps,  $f'$  donne la **vitesse**.

### Correction de l'exercice 1 - Taux de variation

On applique la formule  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

- Entre 1 et 3 :  $f(1) = 2$  et  $f(3) = 10$ , donc  $\frac{10 - 2}{3 - 1} = \frac{8}{2} = 4$ .
- Entre 1 et 1,1 :  $f(1,1) = 1,21 + 1 = 2,21$ , donc  $\frac{2,21 - 2}{0,1} = \frac{0,21}{0,1} = 2,1$ .
- Le second taux est proche de  $f'(1) = 2 \times 1 = 2$  : plus l'intervalle est petit, plus le taux approche le nombre dérivé.

**Réponse.** 4 puis 2,1 (tendance vers  $f'(1) = 2$ ).

### Correction de l'exercice 2 - Dériver un polynôme

On dérive terme à terme, avec  $(x^2)' = 2x$ ,  $(x^3)' = 3x^2$ ,  $(x)' = 1$  et  $(k)' = 0$  ; un coefficient multiplicatif se conserve.

- $3 \times 2x - 5 \times 1 + 0$ , soit  $f'(x) = 6x - 5$ .
- $g'(x) = 3x^2 - 4$ .
- Le coefficient  $-2$  se multiplie par 3 et le 6 par 2 :

$$h'(x) = -2 \times 3x^2 + 6 \times 2x = -6x^2 + 12x$$

La constante  $-1$  disparaît. **Contrôle** en  $x = 1$  :  $f'(1) = 1$ ,  $g'(1) = -1$ ,  $h'(1) = 6$ .

**Réponse.** a)  $6x - 5$  · b)  $3x^2 - 4$  · c)  $-6x^2 + 12x$ .

### Correction de l'exercice 3 - Nombre dérivé

On dérive terme à terme, la constante 2 disparaissant :

$$f(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

- $f(0) = 0$  : la tangente au point d'abscisse 0 est **horizontale**.
- $f(1) = 3 - 6 = -3$  : la courbe descend, avec une pente de  $-3$ .
- $f(2) = 12 - 12 = 0$  : nouvelle tangente horizontale.

La forme factorisée confirme que  $f$  ne s'annule qu'en 0 et en 2, et qu'elle est négative entre les deux.

**Réponse.**  $f(0) = 0$  ;  $f(1) = -3$  ;  $f(2) = 0$ .

### Correction de l'exercice 4 - Équation de tangente

- $f(2) = 8 - 6 + 1 = 3$ .
- $f'(x) = 4x - 3$ , donc  $f'(2) = 5$ .
- Formule du cours :

$$y = f'(2)(x - 2) + f(2) = 5(x - 2) + 3 = 5x - 7$$

- Contrôle : pour  $x = 2$ , la tangente donne  $y = 3 = f(2)$ . Elle passe bien par le point de contact, et sa pente 5 est positive :  $f$  croît au voisinage de 2.

**Réponse.**  $y = 5x - 7$ .

### Correction de l'exercice 5 - Tangente horizontale

- Une tangente est horizontale lorsque  $f'(x) = 0$ .
- $f'(x) = 2x - 10$ , nulle pour  $x = 5$ .
- $f(5) = 25 - 50 + 21 = -4$ .
- La tangente est horizontale au point  $(5; -4)$ . Comme le coefficient de  $x^2$  est positif, c'est le **minimum** de la fonction : le sommet de la parabole.

**Réponse.** Au point  $(5; -4)$  : c'est le minimum de  $f$ .

### Correction de l'exercice 6 - Variations d'un polynôme de degré 2

- $f'(x) = -2x + 8$ .
- $f'(x) = 0$  pour  $x = 4$  ;  $f'(x) > 0$  pour  $x < 4$  et  $f'(x) < 0$  pour  $x > 4$ .

| Intervalle        | $] -\infty ; 4]$ | $[4 ; +\infty[$ |
|-------------------|------------------|-----------------|
| Signe de $f'(x)$  | +                | −               |
| Variations de $f$ | croissante       | décroissante    |

- Maximum :  $f(4) = -16 + 32 - 7 = 9$ , atteint en  $x = 4$ .

**Réponse.**  $f$  croît puis décroît ; maximum 9 en  $x = 4$ .

### Correction de l'exercice 7 - Variations d'un polynôme de degré 3

- $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$ .
- Les racines de  $f'$  sont 0 et 2 ; le coefficient de  $x^2$  étant positif,  $f'$  est positive à l'extérieur de  $[0; 2]$  et négative entre 0 et 2.

| Intervalle        | $] -\infty ; 0]$ | $[0 ; 2]$    | $[2 ; +\infty[$ |
|-------------------|------------------|--------------|-----------------|
| Signe de $f'(x)$  | +                | −            | +               |
| Variations de $f$ | croissante       | décroissante | croissante      |

- $f(0) = 2$  : **maximum local**.
- $f(2) = 8 - 12 + 2 = -2$  : **minimum local**.
- Ce ne sont pas des extremums globaux : pour  $x$  très grand,  $f(x)$  devient très grand.

**Réponse.** Maximum local 2 en  $x = 0$  ; minimum local  $-2$  en  $x = 2$ .

### Correction de l'exercice 8 - Position et vitesse

a) La vitesse est la dérivée de la position :

$$v(t) = d'(t) = t + 2 \quad (\text{en m/s})$$

b)  $v(4) = 4 + 2 = 6$  m/s.

c) On résout  $t + 2 = 9$ , donc  $t = 7$  s.

- Interprétation : la vitesse augmente de façon affine ; en la dérivant, on obtient une accélération constante de  $1 \text{ m/s}^2$ , le mouvement est uniformément accéléré.

**Réponse.** a)  $v(t) = t + 2$  · b) 6 m/s · c) à  $t = 7$  s.

### Correction de l'exercice 9 - Deux tangentes parallèles

- On cherche les  $x$  tels que  $f'(x) = 6$ .
- $f'(x) = 3x^2 - 6$ , donc l'équation est  $3x^2 - 6 = 6$ .
- $3x^2 = 12$ , soit  $x^2 = 4$  :  $x = 2$  ou  $x = -2$ .
- En ces deux points, les tangentes ont la même pente 6 : elles sont **parallèles**.
- Ordonnées :  $f(2) = 8 - 12 = -4$  et  $f(-2) = -8 + 12 = 4$ . Les tangentes sont donc  $y = 6(x - 2) - 4 = 6x - 16$  et  $y = 6(x + 2) + 4 = 6x + 16$ .

**Réponse.**  $x = -2$  et  $x = 2$  (tangentes  $y = 6x + 16$  et  $y = 6x - 16$ ).

### Correction de l'exercice 10 - Problème : volume d'une boîte

a) Après découpe, la base est un carré de côté  $18 - 2x$  et la hauteur vaut  $x$ .

- $V(x) = x(18 - 2x)^2$ , avec  $x > 0$  et  $18 - 2x > 0$ , soit  $x \in ]0 ; 9[$ .

b) On développe avant de dériver :

- $(18 - 2x)^2 = 324 - 72x + 4x^2$ , donc  $V(x) = 4x^3 - 72x^2 + 324x$ .
- $V'(x) = 12x^2 - 144x + 324 = 12(x^2 - 12x + 27) = 12(x - 3)(x - 9)$ .
- Sur  $]0 ; 9[$  :  $x - 9 < 0$ , donc  $V'$  a le signe contraire de  $x - 3$  : positive avant 3, négative après.
- Le volume est donc maximal pour  $x = 3$  cm :  $V(3) = 3 \times 12^2 = 3 \times 144 = 432 \text{ cm}^3$ .
- Contrôle :  $V(2) = 2 \times 196 = 392$  et  $V(4) = 4 \times 100 = 400$ , tous deux inférieurs à 432.

**Réponse.** a)  $V(x) = x(18 - 2x)^2$  sur  $]0 ; 9[$  · b)  $x = 3$  cm, volume maximal  $432 \text{ cm}^3$ .

### Correction de l'exercice 11 - Approximation par la tangente

a)  $f(1) = 1$  et  $f'(x) = 3x^2$  donne  $f'(1) = 3$ . La tangente a pour équation

$$y = 3(x - 1) + 1 = 3x - 2$$

b) Près du point de contact, la courbe se confond presque avec sa tangente :

$$1,02^3 \approx 3 \times 1,02 - 2 = 1,06.$$

- La valeur exacte est  $1,02^3 = 1,061\,208$  : l'erreur est d'environ 0,0012, très faible parce que 1,02 est proche de 1.

- Pour  $1,2^3$ , la tangente donnerait 1,6 alors que la valeur exacte est 1,728 : l'approximation se dégrade quand on s'éloigne.

**Réponse.** a)  $y = 3x - 2$  · b)  $1,02^3 \approx 1,06$  (exact : 1,061 208).

### Correction de l'exercice 12 - Problème : puissance maximale

a) On dérive terme à terme :

$$P'(I) = 12 - 4I$$

Cette dérivée s'annule pour  $I = 3$  ; elle est positive pour  $I < 3$  et négative pour  $I > 3$  (coefficient  $-4$  négatif).

b)  $P$  est croissante sur  $[0 ; 3]$  puis décroissante sur  $[3 ; 6]$  : la puissance est maximale pour  $I = 3$  A, et vaut  $P(3) = 36 - 18 = 18$  W.

— Contrôle :  $P(2) = 24 - 8 = 16$  W et  $P(4) = 48 - 32 = 16$  W, valeurs égales de part et d'autre de 3, inférieures à 18.

— Aux bornes,  $P(0) = 0$  et  $P(6) = 72 - 72 = 0$  : aucune puissance utile.

**Réponse.** a)  $P'(I) = 12 - 4I$ , positive avant 3, négative après · b)  $I = 3$  A,  $P = 18$  W.

### Correction de l'exercice 13 - Retrouver une fonction

La tangente donne deux informations : sa pente est  $f'(1)$  et le point de contact est sur elle.

— Pente :  $f'(1) = 4$ . Avec  $f'(x) = 2ax + b$ , on obtient  $2a + b = 4$ .

— Point de contact :  $f(1) = 4 \times 1 - 1 = 3$ , soit  $a + b = 3$ .

En soustrayant la seconde équation de la première, on élimine  $b$  :

$$a = 1 \quad \text{puis} \quad b = 3 - a = 2$$

La fonction est  $f(x) = x^2 + 2x$ . **Vérification** :  $f(1) = 3$ ,  $f'(x) = 2x + 2$  donne  $f'(1) = 4$ , et la tangente est  $y = 4(x - 1) + 3 = 4x - 1$ .

**Réponse.**  $a = 1$  et  $b = 2$  :  $f(x) = x^2 + 2x$ .

### Correction de l'exercice 14 - Nombre de solutions d'une équation

a)  $f(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$ , positive à l'extérieur de  $[-1 ; 1]$  et négative entre. On calcule les images aux extremums :

$$f(-1) = -1 + 3 + 1 = 3 \quad f(1) = 1 - 3 + 1 = -1$$

| Intervalle        | $] -\infty ; -1 ]$ | $[-1 ; 1]$   | $[1 ; +\infty[$ |
|-------------------|--------------------|--------------|-----------------|
| Variations de $f$ | croissante         | décroissante | croissante      |

b) On suit chaque branche. Sur la première,  $f$  croît de  $f(-2) = -1$  jusqu'à 3 : elle passe par 0. Sur la deuxième, elle descend de 3 à  $-1$  : elle repasse par 0. Sur la troisième, elle monte de  $-1$  à  $f(2) = 3$  : elle passe une dernière fois par 0.

— L'équation a donc **trois solutions**, une dans chacun des intervalles  $] -2 ; -1[$ ,  $]-1 ; 1[$  et  $]1 ; 2[$ .

**Réponse.** a) croît, décroît, croît ; maximum local 3 en  $-1$ , minimum local  $-1$  en 1 · b) trois solutions.

### Correction de l'exercice 15 - Synthèse : étude complète

a)  $f(x) = -3x^2 + 12 = -3(x^2 - 4) = -3(x - 2)(x + 2)$ .

- Racines :  $-2$  et  $2$ . Comme le coefficient dominant de  $f$  est négatif,  $f$  est **positive entre** les racines.

| Intervalle        | $[-4; -2]$   | $[-2; 2]$  | $[2; 4]$     |
|-------------------|--------------|------------|--------------|
| Signe de $f'(x)$  | $-$          | $+$        | $-$          |
| Variations de $f$ | décroissante | croissante | décroissante |

- $f(-2) = 8 - 24 + 5 = -11$  (minimum local) et  $f(2) = -8 + 24 + 5 = 21$  (maximum local).

b) On compare avec les bornes :  $f(-4) = 64 - 48 + 5 = 21$  et  $f(4) = -64 + 48 + 5 = -11$ .

- Le **maximum** de  $f$  sur  $[-4; 4]$  vaut donc 21, atteint deux fois : en  $x = -4$  et en  $x = 2$ .

c)  $f(0) = 5$  et  $f'(0) = 12$ , donc la tangente a pour équation

$$y = 12(x - 0) + 5 = 12x + 5$$

**Réponse.** a) décroît, croît, décroît · b) maximum 21 (en  $-4$  et en  $2$ ) · c)  $y = 12x + 5$ .