

Plaquette 2 - Taux de variation et nombre dérivé

Dérivation — Première STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Taux de variation. Entre a et b :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

C'est le coefficient directeur de la **corde** joignant les deux points.

Avec un accroissement h .

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Nombre dérivé. C'est la valeur vers laquelle tend ce taux quand h devient très petit : le coefficient directeur de la **tangente** en a .

Lecture graphique. Une tangente passant par $(x_1; y_1)$ et $(x_2; y_2)$ a pour pente :

$$f'(a) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Équation de la tangente.

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Signe du nombre dérivé.

Signe de $f'(a)$	Tangente	Comportement local
positif	montante	f croît
négatif	descendante	f décroît
nul	horizontale	souvent un extremum

En physique. Si f donne une position, le taux de variation est la **vitesse moyenne** et le nombre dérivé la **vitesse instantanée**.

⚠ Ne pas confondre $f(a)$, une **hauteur**, et $f'(a)$, une **pente**.

Correction de l'exercice 1 - Taux de variation

Le taux de variation entre a et b est le quotient $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$: c'est le coefficient directeur de la corde qui joint les deux points de la courbe.

a) $f(3) = 9$ et $f(7) = 49$, donc

$$\frac{49 - 9}{7 - 3} = \frac{40}{4} = 10$$

b) $f(4) = 16$ et $f(8) = 64$: $\frac{64 - 16}{4} = \frac{48}{4} = 12$.

c) Ces nombres sont les pentes des cordes, c'est-à-dire la variation moyenne de f par unité. Comme $12 > 10$, la courbe monte plus vite plus loin : c'est l'allure d'une parabole tournée vers le haut.

Lien avec la dérivée : $f(x) = 2x$, et au milieu de $[3; 7]$, $f'(5) = 10$, exactement le taux de a). Pour la fonction carré, le taux sur un intervalle vaut toujours la dérivée en son milieu.

Réponse. a) $10 \cdot$ b) $12 \cdot$ c) les pentes des cordes, qui augmentent.

Correction de l'exercice 2 - Du taux au nombre dérivé

a) On développe avec l'identité $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$: $f(3 + h) = 9 + 6h + h^2$.

b) Le taux entre 3 et $3 + h$ vaut, pour $h \neq 0$,

$$\frac{f(3 + h) - f(3)}{h} = \frac{6h + h^2}{h} = \frac{h(6 + h)}{h} = 6 + h$$

c) Quand h tend vers 0, le taux $6 + h$ tend vers 6 : $f'(3) = 6$.

Contrôle numérique : pour $h = 0,1$ le taux vaut 6,1, pour $h = 0,01$ il vaut 6,01 et pour $h = -0,1$ il vaut 5,9 : il se rapproche de 6 des deux côtés. La formule $f(x) = 2x$ donne bien $f(3) = 6$, et la tangente en 3 a pour équation $y = 6(x - 3) + 9$, soit $y = 6x - 9$.

Réponse. a) $9 + 6h + h^2 \cdot$ b) $6 + h \cdot$ c) $f'(3) = 6$.

Correction de l'exercice 3 - Lire un nombre dérivé

a) Le nombre dérivé $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 1. On le calcule avec les deux points donnés :

$$f'(1) = \frac{19 - 7}{5 - 1} = \frac{12}{4} = 3$$

Le point de contact est le point de la tangente d'abscisse 1, c'est $(1 ; 7)$: donc $f(1) = 7$.

b) La tangente a pour équation $y = f'(1)(x - 1) + f(1) = 3(x - 1) + 7$, soit $y = 3x + 4$.

Contrôle : en $x = 1$, $3 + 4 = 7$ et en $x = 5$, $15 + 4 = 19$. Il ne faut pas intervertir les deux nombres : 7 est une hauteur (une image), 3 est une pente. Cette pente positive indique que f est croissante au voisinage de 1.

Réponse. a) $f'(1) = 3$ et $f(1) = 7 \cdot$ b) $y = 3x + 4$.

Correction de l'exercice 4 - Signe du nombre dérivé

Le signe du nombre dérivé est celui de la pente de la tangente.

- En $x = -2$, la tangente monte : $f'(-2) > 0$, et f croît au voisinage de -2 .
- En $x = 1$, la tangente est horizontale : $f'(1) = 0$.
- En $x = 4$, la tangente descend : $f'(4) < 0$, et f décroît au voisinage de 4.

La fonction croît puis décroît : comme f passe du positif au négatif en 1, la fonction y atteint

un maximum en $x = 1$

Une tangente horizontale ne suffit pas à elle seule : il faut un **changement de signe** de f' . Pour $f(x) = x^3$, on a $f'(0) = 0$, mais $f'(x) = 3x^2$ reste positif de part et d'autre, et 0 n'est pas un extremum.

Réponse. $f'(-2) > 0$, $f'(1) = 0$, $f'(4) < 0$: f croît puis décroît, avec un maximum en 1.

Correction de l'exercice 5 - Vitesse moyenne et instantanée

a) $d(2) = 5 \times 4 = 20$ m et $d(3) = 5 \times 9 = 45$ m. La vitesse moyenne est la distance parcourue divisée par la durée :

$$v_{\text{moy}} = \frac{45 - 20}{3 - 2} = 25 \text{ m/s}$$

- b) La vitesse instantanée est la dérivée de la position : $d'(t) = 10t$, donc 20 m/s à 2 s et 30 m/s à 3 s.
- c) $20 < 25 < 30$: la vitesse moyenne est comprise entre les deux, ce qui traduit un mobile qui **accélère**. La vitesse croît de 10 m/s chaque seconde (accélération de 10 m/s², dérivée de la vitesse 10t).

La vitesse moyenne est atteinte au milieu de l'intervalle : $d'(2,5) = 25$. De même, entre 3 et 4 s, la vitesse moyenne vaut $40 - 5 = 35$ m/s, égale à $d'(3,5)$.

Réponse. a) 25 m/s · b) 20 m/s et 30 m/s · c) la moyenne est entre les deux, le mobile accélère.

Correction de l'exercice 6 - Approximation par la tangente

- a) $f(3) = 9$ et $f(x) = 2x$ donne $f(3) = 6$. La tangente a pour équation $y = 6(x - 3) + 9$, soit $y = 6x - 9$.
- b) Près de 3, la courbe se confond presque avec sa tangente, donc

$$3,01^2 \approx 6 \times 3,01 - 9 = 18,06 - 9 = 9,06$$

- c) La valeur exacte est $3,01^2 = 9,0601$: l'écart n'est que de 0,0001, car on reste très près du point de contact.

L'écart entre la courbe et la tangente vaut $x^2 - (6x - 9) = (x - 3)^2$: il est égal au carré de l'écart en x . En 3,01 il vaut $0,01^2 = 0,0001$, et en 3,1 il vaut $0,1^2 = 0,01$ (estimation 9,6 pour une valeur exacte 9,61). Ce carré est toujours positif : la parabole reste au-dessus de cette tangente.

Réponse. a) $y = 6x - 9$ · b) 9,06 · c) exact 9,0601, écart de 0,0001.

Correction de l'exercice 7 - Taux d'une fonction affine

- a) On calcule la différence des images : $f(a + h) - f(a) = 7a + 7h - 4 - (7a - 4) = 7h$. Le taux vaut donc, pour $h \neq 0$,

$$\frac{7h}{h} = 7$$

Il ne dépend ni de a ni de h .

- b) Quand h tend vers 0, le taux reste égal à 7 : $f'(a) = 7$ pour tout a .
- c) La courbe est une droite de coefficient directeur 7 : sa tangente en tout point est **la droite elle-même**.

On retient $(mx + p)' = m$: par exemple $(-3x + 11)' = -3$ et $(0,5x)' = 0,5$, et la dérivée d'une constante est nulle. En physique, une position $d(t) = 7t - 4$ décrit un mouvement uniforme, de vitesse constante 7 m/s.

Réponse. a) 7 · b) $f'(a) = 7$ · c) la tangente est la droite elle-même.

Correction de l'exercice 8 - Le cas du cube

- a) $f(1) = 1$ et $f(2) = 8$, donc le taux vaut

$$\frac{8 - 1}{2 - 1} = 7$$

- b) $f(x) = 3x^2$, donc $f'(1) = 6$.

- c) Le taux 7 dépasse nettement la pente au départ, 3 : la fonction cube accélère sur $[1 ; 2]$. À l'arrivée, $f'(2) = 12$, et le taux moyen 7 est bien compris entre 3 et 12.

La pente vaut 7 lorsque $3x^2 = 7$, soit $x = \sqrt{\frac{7}{3}} \approx 1,53$: ce n'est pas le milieu 1,5,

contrairement à la fonction carré. De même entre 0 et 1, le taux vaut 1, compris entre $f(0) = 0$ et $f(1) = 3$: le taux moyen est encadré par les pentes extrêmes quand la pente varie dans un seul sens.

Réponse. a) 7 · b) $f(1) = 3$ · c) le taux dépasse la pente initiale, la fonction accélère.

Correction de l'exercice 9 - Un débit moyen

a) $V(2) = 50 \times 4 = 200$ L et $V(6) = 50 \times 36 = 1\,800$ L. Le débit moyen est le volume écoulé divisé par la durée :

$$\frac{1\,800 - 200}{6 - 2} = \frac{1\,600}{4} = 400 \text{ L/min}$$

b) Le débit instantané est la dérivée du volume : $V'(t) = 100t$, donc $V'(4) = 400$ L/min.

c) Les deux sont égaux, car 4 est le milieu de $[2; 6]$ et V est une fonction du second degré. Le débit $100t$ croît **linéairement** : il vaut 200 L/min à 2 min et 600 L/min à 6 min, de moyenne 400.

Autre contrôle : sur 10 min, 5 000 L s'écoulent, soit 500 L/min en moyenne, et $V(5) = 500$.

Réponse. a) 400 L/min · b) 400 L/min · c) identiques, car 4 est le milieu de l'intervalle.

Correction de l'exercice 10 - Remonter à la fonction

a) La tangente au point d'abscisse 4 a pour coefficient directeur $f'(4)$: on le lit devant x , donc

$$f'(4) = -2$$

Le point de contact appartient à la tangente : son ordonnée est $-2 \times 4 + 15 = 7$, donc $f(4) = 7$.

b) $f'(4) < 0$: f **décroît** au voisinage de 4.

Contrôle : $y = -2(x - 4) + 7 = -2x + 15$, c'est bien l'équation donnée. Lire $f(4) = 15$ serait une erreur : 15 est l'ordonnée de la tangente en $x = 0$. La tangente donne aussi des estimations : $f(4,1) \approx 6,8$ et $f(3,9) \approx 7,2$, cohérentes avec la décroissance.

Réponse. a) $f(4) = 7$ et $f'(4) = -2$ · b) elle décroît.

Correction de l'exercice 11 - Repérer une erreur

L'élève a lu l'ordonnée à l'origine de la tangente : 1 est la valeur de y en $x = 0$, pas en $x = 2$. Or le point de contact, d'abscisse 2, est **sur** la tangente : on obtient $f(2)$ en remplaçant x par 2 dans l'équation,

$$f(2) = 5 \times 2 + 1 = 11$$

Le nombre dérivé est la pente : $f'(2) = 5$.

Vérification : $y = 5(x - 2) + 11 = 5x - 10 + 11 = 5x + 1$, c'est bien l'équation de l'énoncé. L'ordonnée à l'origine ne coïncide avec $f(a)$ que si $a = 0$. L'autre confusion fréquente consiste à prendre 5 pour $f(2)$: la pente se lit devant le x , l'image s'obtient en substituant $x = a$.

Réponse. $f(2) = 5 \times 2 + 1 = 11$, et $f'(2) = 5$.

Correction de l'exercice 12 - Comparer deux taux

a) $f(2) = 8$ et $f(4) = 32$: le taux vaut $\frac{32 - 8}{2} = 12$.

b) $f(6) = 72$: le taux vaut

$$\frac{72 - 32}{6 - 4} = \frac{40}{2} = 20$$

c) $20 > 12$: la croissance s'accélère. Avec $f(x) = 4x$, on retrouve chaque taux comme la dérivée au milieu de l'intervalle : $f(3) = 12$ et $f(5) = 20$.

L'écart entre les deux taux, 8, correspond à un écart de 2 entre les milieux : le rapport 4 est le coefficient de $f(x) = 4x$, qui est affine. On peut ainsi prévoir sans calcul le taux entre 6 et 8 : $f(7) = 28$ (contrôle : $\frac{128 - 72}{2} = 28$).

Réponse. a) 12 · b) 20 · c) la croissance s'accélère ; chaque taux vaut f au milieu.

Correction de l'exercice 13 - Encadrer un nombre dérivé

a) Le taux 8 est la pente moyenne sur $[3; 5]$. Comme la pente augmente sur cet intervalle, elle est la plus petite au départ et la plus grande à l'arrivée, et la moyenne est comprise entre les deux :

$$f(3) < 8 < f(5)$$

Ces deux nombres sont positifs, car f est croissante.

b) 4 est le milieu de l'intervalle : on peut estimer $f(4) \approx 8$. Pour un polynôme du second degré, f est affine et l'égalité est exacte ; pour une autre fonction, ce n'est qu'une estimation. On est seulement sûr que $f(3) < f(4) < f(5)$.

Exemple avec $f(x) = x^2$: le taux vaut $\frac{25 - 9}{2} = 8$, et $f(3) = 6$, $f(4) = 8$, $f(5) = 10$.

Réponse. a) $f(3) < 8 < f(5)$ · b) $f(4) \approx 8$, exactement 8 pour un trinôme.

Correction de l'exercice 14 - Deux tangentes

La dérivée vaut $f'(x) = 2x - 6$.

a) $f'(1) = 1 - 6 + 11 = 6$ et $f'(1) = -4$: la tangente a pour équation $y = -4(x - 1) + 6$, soit $y = -4x + 10$

b) $f'(5) = 25 - 30 + 11 = 6$ et $f'(5) = 4$: $y = 4(x - 5) + 6$, soit $y = 4x - 14$.

c) Les deux points ont la même image 6 et des pentes opposées. Comme $f(1) = f(5)$, la parabole est symétrique par rapport à la droite $x = 3$, milieu de 1 et 5 : deux points symétriques ont des tangentes de pentes opposées.

Les deux tangentes se coupent sur l'axe de symétrie : $-4x + 10 = 4x - 14$ donne $x = 3$ et $y = -2$, sous le sommet (3 ; 2).

Réponse. a) $y = -4x + 10$ · b) $y = 4x - 14$ · c) pentes opposées, car 1 et 5 encadrent symétriquement le sommet 3.

Correction de l'exercice 15 - Une mesure de vitesse

a) $d(1) = 1$ m et $d(3) = 27$ m : la vitesse moyenne vaut

$$\frac{27 - 1}{3 - 1} = \frac{26}{2} = 13 \text{ m/s}$$

b) $d'(t) = 3t^2$, donc la vitesse à 2 s vaut $3 \times 4 = 12$ m/s.

c) $13 > 12$: ici la vitesse moyenne dépasse la vitesse au milieu. Pour une position du second degré, elles seraient égales, car la vitesse serait affine ; ici la vitesse $3t^2$ n'est pas affine, elle croît de plus en plus vite.

La vitesse passe de 3 m/s à 27 m/s, et la moyenne 13 est bien entre les deux. Elle est atteinte quand $3t^2 = 13$, soit $t \approx 2,08$ s, dans l'intervalle. En dérivant la vitesse, on

obtient l'accélération $6t$, soit 12 m/s^2 à 2 s .

Réponse. a) 13 m/s · b) 12 m/s · c) la moyenne dépasse la vitesse au milieu, car l'accélération croît.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : lecture complète

a) $f(2) = 16 - 24 + 5 = -3$, $f(3) = 36 - 36 + 5 = 5$ et $f(4) = 64 - 48 + 5 = 21$.

b) Le taux entre 2 et 4 vaut

$$\frac{21 - (-3)}{4 - 2} = \frac{24}{2} = 12$$

c) $f'(x) = 8x - 12$ donne $f'(2) = 4$, $f'(3) = 12$ et $f'(4) = 20$. Le taux moyen est égal à $f'(3)$, la dérivée au milieu de $[2; 4]$, et il est compris entre les pentes extrêmes 4 et 20.

La dérivée s'annule quand $8x - 12 = 0$, soit $x = 1,5$: elle est négative avant et positive après, donc f admet un minimum en $1,5$, qui vaut $f(1,5) = 9 - 18 + 5 = -4$.

Réponse. a) -3 ; 5 ; 21 · b) 12 · c) 4 ; 12 ; 20 : le taux égale f' au milieu.