

Plaquette 4 – Variations et extremums

Dérivation — Première STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Le théorème des variations.

Signe de f sur un intervalle	f
$f(x) > 0$	croissante
$f(x) < 0$	décroissante

Extremum. Il y a extremum en x_0 si $f(x_0) = 0$ **et** que f change de signe.

Changement de signe	Nature
de $-$ à $+$	minimum
de $+$ à $-$	maximum
aucun	ni l'un ni l'autre

$\triangle f(x_0) = 0$ ne suffit pas : pour $x \mapsto x^3$, $f(0) = 0$ sans extremum.

Factoriser une dérivée du second degré. On met en facteur le coefficient dominant, on cherche des **racines évidentes** parmi les petits entiers, puis on vérifie en développant :

$$3x^2 - 12x + 9 = 3(x - 1)(x - 3)$$

Signe. Un tableau de signes des facteurs donne le signe de f : celui du coefficient dominant **à l'extérieur** des racines, le signe contraire entre elles. Sans racine, elle garde ce signe partout.

La méthode en cinq temps.

Étape	Ce qu'on fait
1	calculer f
2	la factoriser
3	lire son signe
4	dresser le tableau
5	calculer les images aux extremums

Sur un intervalle fermé. Comparer les extremums locaux **et** les valeurs aux bornes.

Correction de l'exercice 1 - Du signe aux variations

a) Sur un intervalle où $f' > 0$, f est croissante ; où $f' < 0$, elle est décroissante. On en déduit le tableau :

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0 - 0		+
$f(x)$	croît	6	2	croît

b) En 1, f passe de $+$ à $-$: maximum local 6. En 3, elle passe de $-$ à $+$: minimum local 2.

$$f(1) = 6 \text{ (maximum local)} \quad f(3) = 2 \text{ (minimum local)}$$

Ces extremums ne sont que **locaux** : f continue de croître après 3 et dépasse 6. Le tableau permet de compter les solutions : $f(x) = 4$ en a trois ($2 < 4 < 6$, une par branche), $f(x) = 6$ deux, $f(x) = 10$ une seule (sur la dernière branche), et $f(x) = 0$ une seule (sur la première, puisque $0 < 2$).

Réponse. a) croît, décroît sur $[1; 3]$, croît · b) maximum 6 en 1, minimum 2 en 3.

Correction de l'exercice 2 - Un polynôme de degré 3

a) $f(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3)$. On cherche des racines évidentes : $x = 1$ donne $1 - 4 + 3 = 0$ et $x = 3$ donne $9 - 12 + 3 = 0$. Le trinôme ayant au plus deux racines,

$$f(x) = 3(x - 1)(x - 3)$$

ce que l'on vérifie en développant : $3(x^2 - 4x + 3) = 3x^2 - 12x + 9$.

b) Le signe de f s'obtient par un tableau de signes des facteurs : positif avant 1, négatif entre 1 et 3, positif après (contrôles : $f(0) = 9$, $f(2) = -3$, $f(4) = 9$). Avec $f(1) = 1 - 6 + 9 + 2 = 6$ et $f(3) = 27 - 54 + 27 + 2 = 2$:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f(x)$	+	0 - 0		+
$f(x)$	croît	6	2	croît

f admet un maximum local 6 en 1 et un minimum local 2 en 3.

Réponse. a) $3(x - 1)(x - 3)$ · b) maximum local 6 en 1, minimum local 2 en 3.

Correction de l'exercice 3 - Un autre degré 3

a) $g'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2)$. Les racines évidentes sont 2 ($4 - 2 - 2 = 0$) et -1 ($1 + 1 - 2 = 0$), d'où

$$g'(x) = 6(x - 2)(x + 1)$$

b) Le produit $(x - 2)(x + 1)$ est positif à l'extérieur des racines et négatif entre elles (contrôle : $g'(0) = -12$). En -1 , g' passe de $+$ à $-$: maximum local $g(-1) = -2 - 3 + 12 + 5 = 12$. En 2, elle passe de $-$ à $+$: minimum local $g(2) = 16 - 12 - 24 + 5 = -15$.

Contrôles : $g(0) = 5$ est bien entre -15 et 12 ; $g(-2) = -16 - 12 + 24 + 5 = 1 < 12$ et $g(3) = 54 - 27 - 36 + 5 = -4 > -15$, cohérents avec un maximum local et un minimum local.

Réponse. a) $6(x - 2)(x + 1)$ · b) maximum local 12 en -1 , minimum local -15 en 2.

Correction de l'exercice 4 - Coefficient dominant négatif

a) $h'(x) = -3x^2 + 6x + 9 = -3(x^2 - 2x - 3)$. Les racines évidentes sont 3 ($9 - 6 - 3 = 0$) et -1 ($1 + 2 - 3 = 0$) :

$$h'(x) = -3(x - 3)(x + 1)$$

b) Le facteur -3 est négatif : h' est **négative** à l'extérieur des racines et positive entre elles. Contrôles : $h'(-2) = -15$, $h'(0) = 9$, $h'(4) = -15$. La fonction est décroissante, croissante, puis décroissante.

En -1 , h' passe de $-$ à $+$: minimum local $h(-1) = 1 + 3 - 9 - 2 = -7$. En 3 , elle passe de $+$ à $-$: maximum local $h(3) = -27 + 27 + 27 - 2 = 25$. **Contrôle** : $h(0) = -2$ est bien entre -7 et 25 . Le coefficient dominant négatif inverse l'ordre habituel : minimum d'abord, maximum ensuite.

Réponse. a) $-3(x-3)(x+1)$ · b) minimum local -7 en -1 , maximum local 25 en 3 .

Correction de l'exercice 5 - Une fonction sans extremum

Il suffit de montrer que la dérivée $k'(x) = 3x^2 + 6x + 5$ est strictement positive.

C'est une fonction du second degré de coefficient $3 > 0$: sa parabole est tournée vers le haut. Pour trouver son minimum, on cherche deux valeurs de même image :

$k'(x) = 5 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(x+2) = 0$, soit $x = 0$ ou $x = -2$. La parabole est symétrique par rapport à la droite $x = -1$, milieu de 0 et -2 , et son minimum vaut

$$k'(-1) = 3 - 6 + 5 = 2$$

Ainsi $k'(x) \geq 2 > 0$ pour tout x : k est **croissante sur** $\mathbb{R}$, sans tangente horizontale ni extremum. **Contrôles** : $k'(0) = 5$, $k'(1) = 14$, $k'(-2) = 5$. La pente ne descend jamais sous 2 , et l'équation $k(x) = 0$ a une seule solution, $x = 0$.

Réponse. $k'(x) = 3(x+1)^2 + 2 \geq 2 > 0$: k est croissante sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 6 - Extremums sur un intervalle fermé

Sur un intervalle fermé, le maximum et le minimum sont à chercher parmi les extremums locaux **et** les bornes.

Les racines de $f(x) = 3(x-1)(x-3)$ sont 1 et 3 , toutes deux dans $[0; 4]$. On compare les images : $f(0) = 2$, $f(1) = 6$, $f(3) = 2$, $f(4) = 64 - 96 + 36 + 2 = 6$.

$$\max_{[0;4]} f = 6 \quad \min_{[0;4]} f = 2$$

Le maximum est atteint deux fois (en 1 et en 4), le minimum aussi (en 0 et en 3) : les bornes comptent autant que les extremums locaux. Sur $[0; 5]$, $f(5) = 125 - 150 + 45 + 2 = 22$: le maximum devient 22 , atteint à la borne, et le maximum local 6 est battu. Sur $[2; 4]$, maximum 6 en 4 et minimum 2 en 3 .

Réponse. Maximum 6 (en $x = 1$ et $x = 4$), minimum 2 (en $x = 0$ et $x = 3$).

Correction de l'exercice 7 - Variations d'un trinôme

a) $m'(x) = -4x + 16$ s'annule pour $x = 4$. C'est une fonction affine de coefficient $-4 < 0$, donc positive avant 4 et négative après (contrôles : $m'(0) = 16$, $m'(6) = -8$).

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$m'(x)$	$+$	0	$-$
$m(x)$	croît	8	décroît

b) $m(4) = -32 + 64 - 24 = 8$. Comme m' passe de $+$ à $-$, c'est un **maximum** :

$$m(x) \leq 8 \text{ pour tout } x$$

Contrôle par la symétrie : $m(3) = -18 + 48 - 24 = 6$ et $m(5) = -50 + 80 - 24 = 6$, images égales de part et d'autre de 4 . La fonction se factorise en $m(x) = -2(x-2)(x-6)$ (à vérifier en développant) : ses racines 2 et 6 ont bien 4 pour milieu.

Réponse. a) $m'(x) = -4x + 16$, croissante puis décroissante · b) maximum 8 en $x = 4$.

Correction de l'exercice 8 - Lire un tableau

a) Le signe de f suit les variations : $f < 0$ sur $]-\infty; -2[$, $f > 0$ sur $]-2; 4[$ et $f < 0$ sur $]4; +\infty[$. Elle s'annule en -2 (minimum local) et en 4 (maximum local).

b) On examine chaque branche. La première descend jusqu'à -5 en venant de valeurs plus grandes que 0 : elle passe par 0 une fois. La deuxième monte de -5 à 20 : elle passe par 0 une fois. La troisième redescend depuis 20 : elle repasse par 0 (avec l'hypothèse, usuelle, qu'elle descend sans limite). Au total,

3 solutions

c) 25 dépasse le maximum local 20 : ni la deuxième ni la troisième branche n'y arrivent. Seule la première, qui vient de valeurs aussi grandes que l'on veut, passe par 25 : **une solution**. Pour $f(x) = 20$, on en trouverait deux, dont $x = 4$.

Réponse. a) $-$, $+$, $-$ · b) trois · c) une.

Correction de l'exercice 9 - Dérivée nulle sans extremum

a) $f(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x^2 - 4x + 4)$. On reconnaît l'identité $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = x$ et $b = 2$:

$$f(x) = 3(x - 2)^2$$

b) f s'annule en $x = 2$, mais un carré multiplié par 3 est toujours positif ou nul : f **ne change pas de signe**. Il n'y a donc pas d'extremum, et f est croissante sur $\mathbb{R}$.

En $x = 2$, la tangente est horizontale : $f(2) = 8 - 24 + 24 - 5 = 3$, d'où la tangente $y = 3$. Mais $f(1) = 2 < 3 < 4 = f(3)$: la fonction continue de croître de part et d'autre. Une dérivée nulle en un point ne suffit jamais à conclure à un extremum ; il faut un changement de signe.

Réponse. a) $3(x - 2)^2$ · b) non : f ne change pas de signe, f est croissante.

Correction de l'exercice 10 - Repérer une erreur

Les racines 1 et 3 sont justes ; c'est la conclusion sur le signe qui est fautive. En factorisant, $f(x) = 3(x - 1)(x - 3)$: entre 1 et 3 , le facteur $x - 1$ est positif et $x - 3$ négatif, donc le produit est **négatif**. Une seule valeur test le confirme :

$$f(2) = 12 - 24 + 9 = -3 < 0$$

La bonne conclusion est donc : f **décroît** sur $]1; 3[$.

Contrôle sur les images : $f(1) = 6$, $f(2) = 8 - 24 + 18 + 2 = 4$, $f(3) = 2$; les valeurs diminuent. L'erreur vient de la confusion entre « s'annule » et « est positif ». Pour un trinôme de coefficient positif, le signe est positif à l'extérieur des racines et négatif entre elles ; dans le doute, on teste une valeur intermédiaire.

Réponse. $f(2) = -3 < 0$: f **décroît** entre 1 et 3 .

Correction de l'exercice 11 - Un volume à optimiser

a) $(10 - 2x)^2 = 100 - 40x + 4x^2$, donc $V(x) = x(100 - 40x + 4x^2) = 4x^3 - 40x^2 + 100x$.

b) $V'(x) = 12x^2 - 80x + 100 = 4(3x^2 - 20x + 25)$. On teste $x = 5$: $75 - 100 + 25 = 0$, c'est une racine. On cherche alors $3x^2 - 20x + 25 = (x - 5)(3x - c)$: le terme constant impose $5c = 25$, donc $c = 5$, et l'on vérifie en développant que $(x - 5)(3x - 5) = 3x^2 - 20x + 25$. D'où

$$V'(x) = 4(x - 5)(3x - 5) = 12\left(x - \frac{5}{3}\right)(x - 5)$$

c) Sur $]0; \frac{5}{3}[$, les deux facteurs sont négatifs et V' est positive ($V'(1) = 32$) ; sur $]\frac{5}{3}; 5[$, elle est négative ($V'(3) = -32$). Le maximum est en $x = \frac{5}{3} \approx 1,67$ cm :

$$V\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{5}{3} \times \left(\frac{20}{3}\right)^2 = \frac{2000}{27} \approx 74,07 \text{ cm}^3.$$

Réponse. a) $4x^3 - 40x^2 + 100x$ · b) $12\left(x - \frac{5}{3}\right)(x - 5)$ · c) $\approx 74,07 \text{ cm}^3$ pour $x = \frac{5}{3}$.

Correction de l'exercice 12 - Comparer deux fonctions

a) $f(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$: positive à l'extérieur de -1 et 1 , négative entre. f est croissante, décroissante, croissante, avec un maximum local $f(-1) = 2$ et un minimum local $f(1) = -2$.

$g'(x) = 3x^2 + 3$ est une somme d'un carré et d'un nombre positif : elle est toujours supérieure ou égale à 3, ne s'annule jamais, et

g est croissante sur $\mathbb{R}$

b) La différence vaut $g(x) - f(x) = 6x$: elle a le signe de x . Donc $g > f$ sur les positifs, $g < f$ sur les négatifs, et les deux courbes se croisent en $(0; 0)$.

Contrôle en $x = 2$: $f(2) = 2$ et $g(2) = 14$, écart $12 = 6 \times 2$. Le terme $+3x$ ajoute une pente 3 partout, ce qui empêche g de s'aplatir : deux extremums pour f , aucun pour g .

Réponse. a) f a deux extremums, g est croissante partout · b) $g > f$ sur les positifs, $g < f$ sur les négatifs.

Correction de l'exercice 13 - Un maximum de production

a) $P'(x) = -3x^2 + 24x - 36 = -3(x^2 - 8x + 12)$. Les racines évidentes sont 2 ($4 - 16 + 12 = 0$) et 6 ($36 - 48 + 12 = 0$) :

$$P'(x) = -3(x - 2)(x - 6)$$

b) À cause du facteur -3 , P' est négative à l'extérieur de 2 et 6, positive entre. En 2, minimum local $P(2) = -8 + 48 - 72 + 50 = 18$; en 6, maximum local $P(6) = -216 + 432 - 216 + 50 = 50$.

c) Sur $[0; 10]$, on compare avec les bornes : $P(0) = 50$ et $P(10) = -1\,000 + 1\,200 - 360 + 50 = -110$. Parmi 50 ; 18 ; 50 ; -110 , le maximum est 50, atteint en $x = 0$ et en $x = 6$.

Du point de vue industriel, on retient $x = 6$: la même valeur que sans rien produire, mais avec une activité réelle.

Réponse. a) $-3(x - 2)(x - 6)$ · b) minimum 18 en 2, maximum 50 en 6 · c) maximum 50.

Correction de l'exercice 14 - Deux régimes

a) $3 \times (-0,5) = -1,5$ et $6 \times 2 = 12$, donc $r'(x) = -1,5x^2 + 12x - 18 = -1,5(x^2 - 8x + 12)$. Comme à l'exercice précédent, les racines évidentes sont 2 et 6 :

$$r'(x) = -1,5(x - 2)(x - 6)$$

b) r' est négative à l'extérieur des racines et positive entre (contrôles : $r'(0) = -18$, $r'(4) = 6$). Minimum local en 2 : $r(2) = -4 + 24 - 36 + 40 = 24$. Maximum local en 6 : $r(6) = -108 + 216 - 108 + 40 = 40$.

Sur $[0; 8]$, les bornes donnent $r(0) = 40$ et $r(8) = -256 + 384 - 144 + 40 = 24$. Le maximum 40 est atteint en 0 et en 6, le minimum 24 en 2 et en 8 : deux régimes de même rendement maximal.

Réponse. a) $-1,5(x-2)(x-6)$ · b) minimum 24 en 2, maximum 40 en 6.

Correction de l'exercice 15 - Un paramètre à déterminer

On traduit les deux conditions. $f(1) = 4$ donne $1 + a + b = 4$, soit $a + b = 3$. Un extremum en 1 impose $f'(1) = 0$ avec $f(x) = 3x^2 + 2ax + b$, soit $3 + 2a + b = 0$, c'est-à-dire $2a + b = -3$.

En soustrayant la première équation de la seconde :

$$a = -6 \quad \text{puis} \quad b = 3 - a = 9$$

La fonction est $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

Vérification : $f(1) = 1 - 6 + 9 = 4$ et $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$ s'annule bien en 1. Il faut encore vérifier le changement de signe : $f'(0) = 9 > 0$ et $f'(2) = -3 < 0$, donc 1 est un maximum local. L'autre racine 3 donne un minimum local, $f(3) = 27 - 54 + 27 = 0$.

Réponse. $a = -6$ et $b = 9$, soit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : étude complète

a) $f(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2)$. Les racines évidentes sont 1 ($1 - 3 + 2 = 0$) et 2 ($4 - 6 + 2 = 0$) :

$$f(x) = 6(x-1)(x-2)$$

b) f est positive à l'extérieur de 1 et 2, négative entre (contrôles : $f(0) = 12$, $f(1,5) = -1,5$, $f(3) = 12$). Avec $f(1) = 2 - 9 + 12 - 3 = 2$ et $f(2) = 16 - 36 + 24 - 3 = 1$:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0 - 0		+
$f(x)$	croît	2	1	croît

c) Maximum local 2 en 1, minimum local 1 en 2. Après 1, la fonction ne descend pas sous $1 > 0$: aucune solution de $f(x) = 0$ sur $[1; +\infty[$. Sur la première branche, f croît de $f(0) = -3 < 0$ à $f(1) = 2 > 0$: elle passe par 0 exactement une fois. L'équation a **une seule solution**, comprise entre 0 et 1.

Réponse. a) $6(x-1)(x-2)$ · b) croît, décroît sur $[1; 2]$, croît · c) maximum 2, minimum 1, une seule solution.