

Plaquette 5 - Applications physiques et optimisation

Dérivation — Première STI2D

Exercices

Méthode

En STI2D, la dérivée sert à deux choses : décrire un **taux instantané** (vitesse, débit, puissance) et **optimiser** une grandeur sous contrainte. Chaque exercice se termine par une conclusion chiffrée avec son unité.

Exercice 1 - Position, vitesse, accélération

Un mobile a pour position $d(t) = t^3 - 6t^2 + 12t$, en mètres.

- Calculer la vitesse $v(t)$.
- Calculer $v(0)$, $v(2)$ et $v(4)$.
- Le mobile recule-t-il ?

Exercice 2 - Une boîte à volume maximal

Dans un carré de carton de 24 cm de côté, on découpe quatre carrés de côté x aux coins pour former une boîte sans couvercle.

- Exprimer le volume.
- Déterminer le volume maximal.

Exercice 3 - Un enclos compartimenté

Avec 90 m de grillage, on clôture un rectangle partagé en deux par une cloison parallèle à la largeur.

- Exprimer l'aire en fonction de la largeur x .
- Déterminer l'aire maximale.

Exercice 4 - Un coût à minimiser

Le coût vaut $C(x) = x^3 - 15x^2 + 63x + 50$, en euros.

- Factoriser C' .
- Déterminer les extremums.

Exercice 5 - Une puissance transmise

La puissance vaut $P(x) = 12x - 0,3x^2$, en watts.

- Déterminer la puissance maximale.
- Pour quelles valeurs est-elle positive ?

Exercice 6 - Une distance de freinage

La distance d'arrêt vaut $d(v) = 0,006v^2 + 0,2v$, en mètres, v en km/h.

- Calculer $d(50)$ et $d(90)$.

b) Calculer $d'(90)$ et l'interpréter.

Exercice 7 - Une consommation minimale

La consommation vaut $c(v) = 0,003v^2 - 0,3v + 12$, en litres aux 100 km.

- a) Déterminer la vitesse la plus économe.
- b) Calculer la consommation correspondante.

Exercice 8 - Un débit à optimiser

Le débit vaut $D(t) = -t^3 + 9t^2 - 15t + 20$, en litres par minute, pour t entre 0 et 7.

- a) Factoriser D' .
- b) Déterminer les extremums.

Exercice 9 - Un temps de parcours

Le temps total vaut $T(v) = \frac{300}{v} + \frac{v}{40}$, en heures.

- a) Calculer $T(100)$, $T(110)$ et $T(120)$.
- b) Où semble se situer le minimum ?

Exercice 10 - Repérer une erreur

Un élève cherche le maximum de $V(x) = 4x^3 - 96x^2 + 576x$ sur $]0; 12[$ et répond « $x = 12$, car $V'(12) = 0$ ». Corriger.

Exercice 11 - Une section optimale

Une gouttière est formée d'une tôle de 30 cm de large, pliée en U : deux côtés de hauteur x et un fond.

- a) Exprimer la section.
- b) Déterminer la section maximale.

Exercice 12 - Un optimum hors domaine

La puissance $P(x) = 12x - 0,3x^2$ est limitée à $x \leq 15$.

- a) Où serait l'optimum sans contrainte ?
- b) Quel est l'optimum réel ?

Exercice 13 - Une énergie et sa puissance

L'énergie consommée vaut $E(t) = 0,5t^3 - 3t^2 + 12t$, en kilojoules, t en secondes.

- a) Calculer la puissance $E'(t)$.
- b) Déterminer la puissance minimale.

Exercice 14 - Deux réglages à comparer

Réglage A : $P_A(x) = 16x - 0,4x^2$. Réglage B : $P_B(x) = 20x - 0,8x^2$.

- a) Déterminer les deux maximums.
- b) Lequel retenir, et sur quelle plage ?

Exercice 15 - Une contrainte de production

Le bénéfice vaut $B(x) = -x^3 + 18x^2 - 60x$, en euros, pour x entre 0 et 12.

- a) Factoriser B' .
- b) Déterminer le bénéfice maximal.

Exercice 16 - Synthèse : un réservoir

Un réservoir a une base carrée de côté x et une hauteur h , avec la contrainte $x + h = 9$ mètres.

- a) Exprimer le volume en fonction de x .
- b) Déterminer le volume maximal.