

## MATHÉMATIQUES

# Dérivation

## Première STI2D

Sécante • Tangente • Nombre dérivé • Équation de tangente  
Fonction dérivée • Polynômes de degré 3 • Variations • Extremums • Vitesse

## Repères du programme

Ce cours suit le **programme de mathématiques du tronc commun de la voie technologique, classe de première** (arrêté du 26 février 2026, BO du 2 avril 2026, rentrée 2026), partie « Analyse », section « Dérivation ». Il couvre :

- point de vue local, approche graphique : sécantes, taux de variation, tangente comme position limite des sécantes, nombre dérivé ;
- équation réduite de la tangente  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$  ;
- point de vue global : fonction dérivée ; dérivées de  $x \mapsto x^2$  et  $x \mapsto x^3$  ; dérivée d'une somme, de  $kf$  ; polynômes de degré au plus 3 ;
- lien entre signe de la dérivée et variations ; extremums ; vitesse moyenne et instantanée.

**Objectif :** lire et calculer un nombre dérivé, écrire l'équation d'une tangente, dériver un polynôme de degré au plus 3 et en déduire ses variations.

Document pédagogique – mathlvl.fr

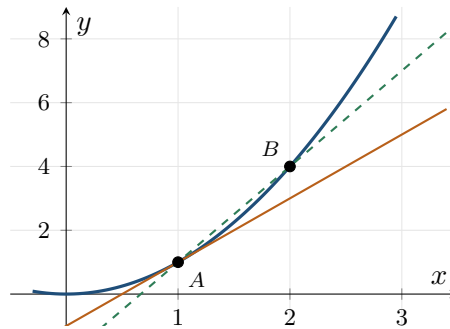
## Table des matières

|          |                                               |          |
|----------|-----------------------------------------------|----------|
| <b>1</b> | <b>Nombre dérivé et tangente</b>              | <b>3</b> |
| <b>2</b> | <b>Fonction dérivée</b>                       | <b>3</b> |
| <b>3</b> | <b>Dérivée et variations</b>                  | <b>4</b> |
| <b>4</b> | <b>Vitesse moyenne et vitesse instantanée</b> | <b>4</b> |
| <b>5</b> | <b>Erreurs classiques</b>                     | <b>5</b> |
| <b>6</b> | <b>Fiche de synthèse</b>                      | <b>5</b> |
| <b>7</b> | <b>Exercices d'application</b>                | <b>5</b> |
| <b>8</b> | <b>Corrigés des exercices</b>                 | <b>5</b> |

## 1. Nombre dérivé et tangente

### Nombre dérivé

Quand le point  $B$  de la courbe se rapproche du point  $A$  d'abscisse  $a$ , la sécante  $(AB)$  se rapproche d'une droite : la **tangente** en  $A$ . Son coefficient directeur est le **nombre dérivé** de  $f$  en  $a$ , noté  $f'(a)$  : c'est la limite du taux de variation  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  quand  $h$  se rapproche de 0.



Pour  $f(x) = x^2$  : la sécante  $(AB)$  (pointillés, pente 3) et la tangente en  $A(1; 1)$  (pente  $f'(1) = 2$ ).

### Lire un nombre dérivé

$f'(a)$  est la pente de la tangente au point d'abscisse  $a$  : on choisit deux points de la tangente et l'on calcule  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ . Une tangente horizontale correspond à  $f'(a) = 0$ .

### Équation de la tangente

La tangente au point d'abscisse  $a$  a pour équation

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Pour  $f(x) = x^2$  en  $a = 1$  :  $f(1) = 1$  et  $f'(1) = 2$ , d'où  $y = 2(x - 1) + 1 = 2x - 1$ .

## 2. Fonction dérivée

### Dérivées à connaître

|         |     |          |       |        |
|---------|-----|----------|-------|--------|
| $f(x)$  | $k$ | $mx + p$ | $x^2$ | $x^3$  |
| $f'(x)$ | 0   | $m$      | $2x$  | $3x^2$ |

Dérivée d'une somme :  $(u + v)' = u' + v'$  ; d'un produit par une constante :  $(ku)' = ku'$ .

### Dériver un polynôme

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$  :  $f'(x) = 2 \times 3x^2 - 3 \times 2x - 12 = 6x^2 - 6x - 12$ .

### 3. Dérivée et variations

#### Signe de la dérivée (admis)

Sur un intervalle : si  $f'(x) > 0$  (sauf en des points isolés),  $f$  est strictement croissante ; si  $f'(x) < 0$ , strictement décroissante. Si  $f'$  s'annule en changeant de signe en  $a$ ,  $f$  admet un **extremum** local en  $a$  (tangente horizontale).

#### Étude complète

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x + 1)(x - 2)$  (on vérifie en développant). Signe : positif à l'extérieur de  $-1$  et  $2$ .

|         |                                                                         |      |     |           |     |
|---------|-------------------------------------------------------------------------|------|-----|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$                                                               | $-1$ | $2$ | $+\infty$ |     |
| $f'(x)$ | $+$                                                                     | $0$  | $-$ | $0$       | $+$ |
| $f(x)$  | <div><div></div><div>12</div><div></div><div>-15</div><div></div></div> |      |     |           |     |

$f(-1) = -2 - 3 + 12 + 5 = 12$  (maximum local) et  $f(2) = 16 - 12 - 24 + 5 = -15$  (minimum local).

#### Optimiser

On exprime la grandeur à optimiser par une fonction, on étudie ses variations sur l'intervalle utile, et l'on lit le maximum ou le minimum dans le tableau.

### 4. Vitesse moyenne et vitesse instantanée

#### Interprétation cinématique

Si  $x(t)$  est la position d'un mobile sur une droite à l'instant  $t$ , le taux de variation entre  $t_1$  et  $t_2$  est la **vitesse moyenne**, et le nombre dérivé  $x'(t)$  la **vitesse instantanée**.

#### Chute d'une bille

Une bille lâchée sans vitesse parcourt  $x(t) = 4,9t^2$  mètres en  $t$  secondes. Vitesse moyenne entre 1 et 2 s :  $\frac{19,6 - 4,9}{1} = 14,7$  m/s. Vitesse instantanée :  $x'(t) = 9,8t$ , soit  $x'(2) = 19,6$  m/s.

## 5. Erreurs classiques

### À éviter

- Confondre  $f(a)$  (une ordonnée) et  $f'(a)$  (une pente).
- Oublier le facteur :  $(2x^3)' = 6x^2$ , pas  $2x^2$ .
- Conclure à un extremum dès que  $f'(a) = 0$  sans changement de signe.
- Inverser  $x - a$  et  $a - x$  dans l'équation de la tangente.

## 6. Fiche de synthèse

|                      |                                                                                          |
|----------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Nombre dérivé</b> | pente de la tangente en $a$ ; limite du taux de variation                                |
| <b>Tangente</b>      | $y = f'(a)(x - a) + f(a)$                                                                |
| <b>Dérivées</b>      | $(x^2)' = 2x$ ; $(x^3)' = 3x^2$ ; $(mx + p)' = m$ ; $(u + v)' = u' + v'$ ; $(ku)' = ku'$ |
| <b>Variations</b>    | $f' > 0$ : croissante ; $f' < 0$ : décroissante ; extremum si $f'$ change de signe       |
| <b>Vitesse</b>       | taux de variation : moyenne ; nombre dérivé : instantanée                                |

## 7. Exercices d'application

### Exercice 1 – Dérivées

Dériver : a)  $f(x) = 4x^3 - x^2 + 7$  ; b)  $g(x) = -3x^2 + 5x$  ; c)  $h(x) = x^3 - 12x$ .

### Exercice 2 – Tangente

Donner l'équation de la tangente à la courbe de  $g(x) = -3x^2 + 5x$  au point d'abscisse 1.

### Exercice 3 – Variations

Étudier les variations de  $h(x) = x^3 - 12x$  et donner ses extremums locaux.

### Exercice 4 – Coût

Le coût de fabrication de  $x$  centaines de pièces est  $C(x) = x^3 - 6x^2 + 15x + 10$  (en euros), pour  $x \in [0; 6]$ . Montrer que  $C$  est croissante sur  $[0; 6]$ .

## 8. Corrigés des exercices

### Corrigé de l'exercice 1

**Corrigé.** a)  $f'(x) = 12x^2 - 2x$ . b)  $g'(x) = -6x + 5$ . c)  $h'(x) = 3x^2 - 12$ .

### Corrigé de l'exercice 2

**Corrigé.**  $g(1) = 2$  et  $g'(1) = -1$  :  $y = -(x - 1) + 2 = -x + 3$ .

**Corrigé de l'exercice 3**

**Corrigé.**  $h'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x - 2)(x + 2)$  : positif pour  $x < -2$  et  $x > 2$ , négatif entre.  $h$  croît, décroît sur  $[-2; 2]$ , puis croît. Maximum local  $h(-2) = -8 + 24 = 16$  ; minimum local  $h(2) = -16$ .

**Corrigé de l'exercice 4**

**Corrigé.**  $C'(x) = 3x^2 - 12x + 15 = 3(x^2 - 4x + 5) = 3((x - 2)^2 + 1) > 0$  :  $C$  est strictement croissante sur  $[0; 6]$ .