

Plaquette 2 - Dérivées usuelles, produit et quotient

Dérivées et approximation affine — Première STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Dérivées usuelles.

$f(x)$	k	x	x^n	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$	$\cos x$	$\sin x$
$f'(x)$	0	1	nx^{n-1}	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$-\sin x$	$\cos x$

Opérations simples.

- $(ku)' = ku'$: un facteur constant se garde tel quel.
- $(u + v)' = u' + v'$: on dérive terme à terme.

Produit.

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Quotient.

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

- L'ordre compte : au numérateur, c'est $u'v$ **moins** uv' .
- Le dénominateur est le **carré** de v .

Méthode en quatre temps pour un produit ou un quotient.

1. Nommer u et v .
2. Calculer u' et v' à part.
3. Appliquer la formule **sans simplifier**.
4. Développer et réduire seulement à la fin.

⚠ La dérivée d'un produit **n'est pas** le produit des dérivées : $(x^2 \times x^3)' = 5x^4$, alors que $2x \times 3x^2 = 6x^3$.

Correction de l'exercice 1 - Un polynôme du second degré

On dérive terme à terme : un coefficient se conserve, $(x^2)' = 2x$, $(x)' = 1$ et la dérivée d'une constante est nulle. Ainsi $(3x^2)' = 3 \times 2x = 6x$, $(-5x)' = -5$ et $(2)' = 0$:

$$f'(x) = 6x - 5$$

En $x = 2$: $f'(2) = 6 \times 2 - 5 = 7$.

Ce nombre est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 2 : il est positif, la fonction est donc croissante au voisinage de 2. **Contrôle** :

$f(2) = 12 - 10 + 2 = 4$, et la tangente $y = 7(x - 2) + 4$ passe bien par $(2; 4)$.

Réponse. $f'(x) = 6x - 5$ et $f'(2) = 7$.

Correction de l'exercice 2 - Un polynôme du troisième degré

On dérive terme à terme : $(x^3)' = 3x^2$, $(-4x^2)' = -4 \times 2x = -8x$ et la constante 7 disparaît, donc $f'(x) = 3x^2 - 8x$.

Pour résoudre $f'(x) = 0$, on factorise par x puis on applique la règle du produit nul :

$$x(3x - 8) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{8}{3} \approx 2,67$$

La courbe admet donc deux tangentes horizontales, aux points d'abscisses 0 et $\frac{8}{3}$.

Comme f change de signe en chacune de ces valeurs (elle est positive à l'extérieur de $\left[0; \frac{8}{3}\right]$ et négative entre), ce sont les abscisses d'un maximum local et d'un minimum local. **Contrôle** : $f(1) = 3 - 8 = -5 < 0$.

Réponse. $f(x) = 3x^2 - 8x$, qui s'annule en 0 et en $\frac{8}{3}$.

Correction de l'exercice 3 - Avec un inverse

On utilise la dérivée de la fonction inverse, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, et $(2x)' = 2$:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 2$$

En $x = 1$: $f'(1) = -1 + 2 = 1$. Ce nombre est positif : f est croissante au voisinage de 1.

La dérivée s'annule quand $\frac{1}{x^2} = 2$, soit $x^2 = \frac{1}{2}$ et, sur $]0; +\infty[$, $x = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$. Le piège classique est d'oublier le signe moins : la fonction inverse est décroissante, sa dérivée doit donc être négative.

Réponse. $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 2$ et $f'(1) = 1$.

Correction de l'exercice 4 - Avec une racine

On utilise $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, valable pour $x > 0$, et $(3x)' = 3$:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 3$$

En $x = 4$, $\sqrt{4} = 2$, donc le premier terme vaut $\frac{1}{4} = 0,25$ et $f'(4) = 3,25$.

La dérivée n'existe pas en 0, où le dénominateur $2\sqrt{x}$ s'annule. Près de 0, le terme $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ devient très grand : la tangente à la courbe y est presque verticale. **Contrôle** : la dérivée est toujours supérieure à 3, donc f est croissante sur $]0; +\infty[$.

Réponse. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 3$ et $f'(4) = 3,25$.

Correction de l'exercice 5 - Fonctions trigonométriques

On utilise les dérivées du cours, $(\cos x)' = -\sin x$ et $(\sin x)' = \cos x$, et l'on conserve le coefficient 2 :

$$f'(x) = -\sin x + 2 \cos x$$

En 0 : $\sin 0 = 0$ et $\cos 0 = 1$, donc $f'(0) = 0 + 2 = 2$.

En $\frac{\pi}{2}$: $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ et $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, donc $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 + 0 = -1$.

Le piège est d'oublier le signe moins dans la dérivée du cosinus. Pour s'en souvenir : à partir de 0, le cosinus commence par diminuer (de 1 vers 0), sa dérivée y est donc négative ou nulle.

Réponse. $f'(x) = -\sin x + 2 \cos x$; $f'(0) = 2$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

Correction de l'exercice 6 - Un premier produit

On pose $u(x) = 2x + 1$, de dérivée $u'(x) = 2$, et $v(x) = x^2 - 3$, de dérivée $v'(x) = 2x$. La formule du produit $(uv)' = u'v + uv'$ donne

$$f(x) = 2(x^2 - 3) + (2x + 1) \times 2x$$

On développe chaque morceau : $2x^2 - 6$ et $4x^2 + 2x$, d'où $f(x) = 6x^2 + 2x - 6$.

Contrôle par une autre méthode : en développant d'abord, $f(x) = 2x^3 + x^2 - 6x - 3$, dont la dérivée terme à terme est bien $6x^2 + 2x - 6$. Les deux méthodes donnent le même résultat.

Réponse. $f(x) = 6x^2 + 2x - 6$.

Correction de l'exercice 7 - Produit avec un sinus

On pose $u(x) = x^2$ et $v(x) = \sin x$, de dérivées $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = \cos x$. La formule du produit $(uv)' = u'v + uv'$ donne

$$f(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

On peut factoriser par x : $f(x) = x(2 \sin x + x \cos x)$.

En 0, les deux termes sont nuls : $f(0) = 0$. La courbe admet donc une tangente horizontale à l'origine, ce qui est cohérent avec $f(x) = x^2 \sin x$, très petit près de 0 (de l'ordre de x^3). Dériver x^2 et $\sin x$ séparément puis multiplier ($2x \cos x$) serait faux.

Réponse. $f(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$.

Correction de l'exercice 8 - Produit avec une racine

On pose $u(x) = 3x - 2$ et $v(x) = \sqrt{x}$, de dérivées $u' = 3$ et $v' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. La formule du produit donne $f(x) = 3\sqrt{x} + \frac{3x - 2}{2\sqrt{x}}$.

Pour réduire au même dénominateur, on écrit $3\sqrt{x} = \frac{3\sqrt{x} \times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{6x}{2\sqrt{x}}$, car $\sqrt{x} \times \sqrt{x} = x$. D'où

$$f(x) = \frac{6x + 3x - 2}{2\sqrt{x}} = \frac{9x - 2}{2\sqrt{x}}$$

Contrôle en $x = 1$: la forme réduite donne $\frac{7}{2} = 3,5$, la forme non réduite $3 + \frac{1}{2} = 3,5$. La dérivée s'annule pour $9x - 2 = 0$, soit $x = \frac{2}{9}$.

Réponse. $f(x) = \frac{9x - 2}{2\sqrt{x}}$.

Correction de l'exercice 9 - Un premier quotient

On pose $u(x) = 2x + 1$ et $v(x) = x - 3$, de dérivées $u' = 2$ et $v' = 1$. La formule du quotient $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ donne un numérateur égal à

$2(x - 3) - (2x + 1) \times 1 = 2x - 6 - 2x - 1 = -7$, d'où

$$f(x) = \frac{-7}{(x - 3)^2}$$

Le dénominateur est un carré, strictement positif sur $]3; +\infty[$, et le numérateur est négatif : $f(x) < 0$. La fonction est **décroissante** sur tout l'intervalle.

L'erreur classique consiste à oublier les parenthèses autour de $2x + 1$ et à écrire

$$2x - 6 - 2x + 1 = -5.$$

Réponse. $f(x) = \frac{-7}{(x-3)^2}$, toujours négative.

Correction de l'exercice 10 - Un quotient avec un carré

On pose $u(x) = x$ et $v(x) = x^2 + 1$, de dérivées $u' = 1$ et $v' = 2x$. Le numérateur de la formule du quotient vaut $1 \times (x^2 + 1) - x \times 2x = 1 - x^2$, d'où

$$f(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

Le dénominateur est toujours strictement positif : f a le signe de $1 - x^2 = (1 - x)(1 + x)$, positif pour $-1 < x < 1$ et négatif à l'extérieur.

La fonction est donc décroissante sur $] -\infty ; -1]$, croissante sur $[-1 ; 1]$ et décroissante sur $[1 ; +\infty[$: elle admet un minimum $f(-1) = -\frac{1}{2}$ et un maximum $f(1) = \frac{1}{2}$.

Réponse. $f(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$: positive sur $[-1 ; 1]$, négative ailleurs.

Correction de l'exercice 11 - Deux méthodes pour un même quotient

Première méthode : simplifier d'abord. Sur $]0 ; +\infty[$, $\frac{x^2 - 1}{x} = \frac{x^2}{x} - \frac{1}{x} = x - \frac{1}{x}$, dont la dérivée vaut $1 - \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 + \frac{1}{x^2}$.

Seconde méthode : formule du quotient. Avec $u = x^2 - 1$ et $v = x$, donc $u' = 2x$ et $v' = 1$, le numérateur vaut $2x \times x - (x^2 - 1) \times 1 = x^2 + 1$:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2} = 1 + \frac{1}{x^2}$$

Les deux méthodes donnent le même résultat. Simplifier avant de dériver évite souvent la formule du quotient, plus longue et source d'erreurs de signe. La dérivée étant toujours positive, f est croissante.

Réponse. $f(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$ par les deux méthodes.

Correction de l'exercice 12 - Quotient trigonométrique

On pose $u(x) = \cos x$ et $v(x) = x$, de dérivées $u' = -\sin x$ et $v' = 1$. Le numérateur de $\frac{u'v - uv'}{v^2}$ vaut $-\sin x \times x - \cos x \times 1$:

$$f(x) = \frac{-x \sin x - \cos x}{x^2} = -\frac{x \sin x + \cos x}{x^2}$$

En π : $\sin \pi = 0$ et $\cos \pi = -1$, donc le numérateur vaut $-\pi \times 0 - (-1) = 1$ et

$$f(\pi) = \frac{1}{\pi^2} \approx 0,101.$$

Ce nombre est positif : la fonction est croissante au voisinage de π . Attention à l'ordre des termes au numérateur, $u'v$ **moins** uv' : l'inverser changerait le signe du résultat.

Réponse. $f(x) = \frac{-x \sin x - \cos x}{x^2}$.

Correction de l'exercice 13 - Coefficient directeur d'une tangente

- a) On dérive terme à terme : $f'(x) = 2x - 4$.
 b) Une tangente est horizontale lorsque son coefficient directeur est nul, c'est-à-dire $f'(x) = 0$: $2x - 4 = 0$ donne $x = 2$. En ce point, $f(2) = 4 - 8 + 1 = -3$; comme f passe du négatif au positif, c'est le minimum de la parabole.
 c) On cherche $f(x) = 2$:

$$2x - 4 = 2 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$$

Vérification : $f(3) = 6 - 4 = 2$. Au point d'ordonnée $f(3) = 9 - 12 + 1 = -2$, la tangente a pour équation $y = 2(x - 3) - 2 = 2x - 8$.

Réponse. a) $f'(x) = 2x - 4$ · b) $x = 2$ · c) $x = 3$.

Correction de l'exercice 14 - Une erreur à corriger

L'élève a multiplié les deux dérivées : or la dérivée d'un produit n'est **pas** le produit des dérivées. Un contre-exemple simple le montre : $(x^2 \times x^3)' = (x^5)' = 5x^4$, alors que $2x \times 3x^2 = 6x^3$.

Calcul correct. On pose $u = x^2$ et $v = \cos x$, de dérivées $u' = 2x$ et $v' = -\sin x$, puis on applique $(uv)' = u'v + uv'$:

$$f'(x) = 2x \cos x - x^2 \sin x$$

Contrôle en 0 : $f'(0) = 0$. C'est plausible, puisque $f(x) = x^2 \cos x$ vaut 0 en 0 et reste positive au voisinage : l'origine est un minimum local, avec une tangente horizontale.

Réponse. Il faut $(uv)' = u'v + uv'$, soit $f'(x) = 2x \cos x - x^2 \sin x$.

Correction de l'exercice 15 - Une fonction de coût

- a) Le coût marginal est la dérivée du coût total. Terme à terme : $(0,02x^2)' = 0,04x$, $(6x)' = 6$ et $(400)' = 0$, donc $C'(x) = 0,04x + 6$.
 b) $C'(100) = 0,04 \times 100 + 6 = 10$ € : à partir de 100 pièces, produire une pièce de plus coûte environ 10 €.
 c) On calcule les coûts exacts :

$$C(101) = 0,02 \times 10\,201 + 606 + 400 = 1\,210,02 \quad C(100) = 200 + 600 + 400 = 1\,200$$

La 101-ième pièce coûte réellement $1\,210,02 - 1\,200 = 10,02$ €. Le coût marginal 10 € en est une excellente approximation : l'écart n'est que de deux centimes, car une pièce est un petit pas devant 100.

Réponse. a) $C'(x) = 0,04x + 6$ · b) 10 € · c) 10,02 € réellement, l'écart est de deux centimes.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : étude d'une fonction quotient

- a) On sépare la fraction : $\frac{x^2}{x} + \frac{4}{x}$, d'où

$$f(x) = x + \frac{4}{x}$$

- b) $(x)' = 1$ et $\left(\frac{4}{x}\right)' = 4 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$, donc $f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2}$.

- c) Le dénominateur est positif : f' a le signe de $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$. Sur $]0; +\infty[$, $x + 2 > 0$, donc f' est négative avant 2 et positive après : f admet un **minimum** en $x = 2$, qui vaut $f(2) = 2 + 2 = 4$.

d) Le coût unitaire est minimal pour 200 pièces, à 4 € la pièce. En deçà, les frais fixes sont mal répartis ; au-delà, la production sature. **Contrôle** : $f(1) = 5$ et $f(4) = 5$, deux valeurs plus grandes que 4 de part et d'autre de 2.

Réponse. a) $f(x) = x + \frac{4}{x}$ · b) $f(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$ · c) minimum 4 en $x = 2$ · d) le coût unitaire est minimal à 200 pièces, soit 4 € par pièce.