

Plaquette 4 - Notation différentielle et variations relatives

Dérivées et approximation affine — Première STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Notation différentielle. Pour $y = f(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \quad \text{donc} \quad dy \approx f'(x) dx$$

- dx est un **petit** accroissement de x , dy l'accroissement de y qui en résulte.
- L'unité de $\frac{dy}{dx}$ est celle de y divisée par celle de x : des volts par degré, des mètres par seconde...

Variation relative. C'est la variation rapportée à la valeur, exprimée en pourcentage :

$$\frac{dy}{y} \approx \frac{f'(x)}{f(x)} dx$$

Le tableau à retenir. Si x varie de $p\%$:

Loi	Variation relative de y
$y = kx$	$p\%$
$y = kx^2$	$2p\%$
$y = kx^3$	$3p\%$
$y = k\sqrt{x}$	$\frac{p}{2}\%$
$y = \frac{k}{x}$	$-p\%$
$y = \frac{k}{\sqrt{x}}$	$-\frac{p}{2}\%$

Produit et quotient. Pour $y = uv$ et $y = \frac{u}{v}$:

$$\frac{dy}{y} \approx \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} \quad \text{et} \quad \frac{dy}{y} \approx \frac{du}{u} - \frac{dv}{v}$$

Les variations relatives s'**ajoutent** pour un produit — c'est ainsi qu'on cumule les incertitudes de mesure.

⚠ Ces règles sont des **approximations**, valables pour de petites variations (quelques pour cent). Pour $+50\%$, il faut refaire le calcul exact.

Correction de l'exercice 1 - Un premier calcul différentiel

La différentielle remplace la variation de y par celle de sa tangente : $dy \approx \frac{dy}{dx} dx$. Ici $\frac{dy}{dx} = 2x$ vaut 10 en $x = 5$, donc

$$dy \approx 2x dx = 10 \times 0,03 = 0,3$$

La variation exacte vaut $5,03^2 - 25 = 25,3009 - 25 = 0,3009$: l'erreur n'est que de 0,0009.

Elle provient exactement du terme $(dx)^2 = 0,03^2 = 0,0009$, puisque $(x + dx)^2 - x^2 = 2x dx + (dx)^2$. Pour un petit dx , ce carré est négligeable devant $2x dx$.

Réponse. $dy = 0,3$ (variation exacte : 0,3009).

Correction de l'exercice 2 - Lire une notation différentielle

a) Une dérivée $\frac{dU}{d\theta}$ a pour unité celle du numérateur divisée par celle du dénominateur : des volts par degré Celsius, $V/^\circ C$. Elle indique de combien de volts la tension varie pour un degré : c'est la **sensibilité** du capteur.

b) On multiplie la sensibilité par la variation de température :

$$dU \approx \frac{dU}{d\theta} \times d\theta = 0,05 \times 12 = 0,6 \text{ V}$$

La tension augmente donc d'environ 600 mV. Une forte sensibilité rend mesurables de petits écarts de température ; en contrepartie, une sensibilité trop élevée sature vite l'électronique de mesure, dont la plage de tension est limitée.

Réponse. a) des $V/^\circ C$, c'est la sensibilité · b) $dU = 0,6 \text{ V}$.

Correction de l'exercice 3 - Différentielle d'un polynôme

On dérive : $\frac{dy}{dx} = 6x + 2$, qui vaut 26 en $x = 4$. La différentielle vaut

$$dy \approx 26 \times 0,1 = 2,6$$

Pour la variation exacte, on calcule $y(4) = 48 + 8 = 56$ et $y(4,1) = 3 \times 16,81 + 8,2 = 50,43 + 8,2 = 58,63$: la variation vaut 2,63, et l'erreur 0,03.

Cette erreur s'explique : le terme $3x^2$ produit, en plus de sa part affine, un reste $3(dx)^2 = 3 \times 0,01 = 0,03$, et le terme $2x$, affine, n'en produit aucun. L'accord avec la théorie est parfait.

Réponse. $dy = 2,6$ (variation exacte : 2,63).

Correction de l'exercice 4 - Aire d'un disque en pourcentage

L'aire $A = \pi r^2$ est proportionnelle au **carré** du rayon. La différentielle donne la variation relative :

$$\frac{dA}{A} = \frac{2\pi r dr}{\pi r^2} = 2 \frac{dr}{r}$$

La variation relative de l'aire est le double de celle du rayon : environ $2 \times 1 \% = 2 \%$.

Vérification exacte : le rayon est multiplié par 1,01, l'aire par $1,01^2 = 1,0201$, soit une hausse de 2,01 %. L'écart avec l'approximation n'est que d'un centième de point. Aucun rayon numérique n'a été nécessaire : la règle ne dépend que de l'exposant.

Réponse. Environ 2 % (exactement 2,01 %).

Correction de l'exercice 5 - Volume d'un cube en pourcentage

Volume. $V = a^3$, donc $\frac{dV}{V} = \frac{3a^2 da}{a^3} = 3 \frac{da}{a}$: la variation relative est **triplée**, environ 3 %.

Exactement, $1,01^3 = 1,030301$, soit 3,03 %.

Surface totale. $S = 6a^2$: le coefficient 6 ne change pas la variation relative, et le carré la double :

$$\frac{dS}{S} = 2 \frac{da}{a} \approx 2 \%$$

Exactement, $1,01^2 = 1,0201$, soit 2,01 %.

L'exposant de la loi **multiplie** la variation relative. Ainsi, une petite dérive d'usinage se paie au cube sur le volume : une arête passant de 10 à 10,1 cm fait passer le volume de 1 000 à environ 1 030 cm³.

Réponse. Le volume augmente d'environ 3 %, la surface d'environ 2 %.

Correction de l'exercice 6 - Puissance et intensité

À résistance constante, $P = RI^2$ est proportionnelle au **carré** de I , donc

$$\frac{dP}{P} = 2 \frac{dI}{I} = 2 \times 3 \% = 6 \%$$

Vérification exacte : $1,03^2 = 1,0609$, soit une hausse de 6,09 %.

Exemple chiffré : avec $R = 40 \, \Omega$ et $I = 5 \, \text{A}$, $P = 40 \times 25 = 1\,000 \, \text{W}$; après la hausse, $I = 5,15 \, \text{A}$ et $P = 40 \times 5,15^2 \approx 1\,060,9 \, \text{W}$, soit 60,9 W de plus, bien 6,09 %. Une surintensité modeste chauffe donc beaucoup un conducteur, ce qui justifie les protections calibrées au plus juste.

Réponse. Environ 6 % (exactement 6,09 %).

Correction de l'exercice 7 - Puissance et tension

$P = \frac{U^2}{R}$ dépend du **carré** de U , la résistance étant fixe. La variation relative est doublée :

$$\frac{dP}{P} = 2 \frac{dU}{U} = 2 \times (-2 \%) = -4 \%$$

Vérification exacte : $0,98^2 = 0,9604$, soit une baisse de 3,96 %.

Exemple chiffré : un radiateur de 2 000 W ne fournit plus qu'environ 1 921 W. Pour fournir la même énergie, il doit chauffer plus longtemps : la durée est multipliée par $\frac{1}{0,9604} \approx 1,041$, soit environ 4 % de plus. Une petite baisse de tension a un effet double sur la puissance.

Réponse. La puissance baisse d'environ 4 % (exactement 3,96 %).

Correction de l'exercice 8 - Une racine carrée

$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ est proportionnelle à $\sqrt{L}$, c'est-à-dire à L puissance $\frac{1}{2}$. La variation relative est donc **divisée par deux** :

$$\frac{dT}{T} = \frac{1}{2} \frac{dL}{L} = \frac{2 \%}{2} = 1 \%$$

Vérification exacte : $\sqrt{1,02} \approx 1,00995$, soit une hausse de 0,995 %. Une période de 2 s passe à environ 2,02 s.

Lecture inverse : pour allonger la période de 10 %, il faut multiplier la longueur par $1,1^2 = 1,21$, soit l'allonger de 21 %. La règle approchée donnerait 20 % : pour une variation de 10 %, l'approximation commence à s'écarter.

Réponse. La période augmente d'environ 1 %.

Correction de l'exercice 9 - Un inverse

La fréquence $f = \frac{1}{T}$ est l'inverse de la période. En dérivant, $\frac{df}{dT} = -\frac{1}{T^2}$, d'où

$$\frac{df}{f} = -\frac{dT}{T} = -(-2\%) = +2\%$$

La variation relative change de **signe** : la fréquence augmente d'environ 2 %.

Vérification exacte : $\frac{1}{0,98} \approx 1,0204$, soit 2,04 % ; l'écart avec l'approximation est de 0,04 point. Ainsi 50 Hz deviennent environ 51 Hz. C'est cohérent : une période plus courte, c'est plus de motifs par seconde.

Réponse. La fréquence augmente d'environ 2 %.

Correction de l'exercice 10 - Un débit

$Q = k\sqrt{H}$ est proportionnelle à la racine de H : la variation relative est **divisée par deux**,

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{1}{2} \frac{dH}{H} = \frac{4\%}{2} = 2\%$$

Vérification exacte : $\sqrt{1,04} \approx 1,0198$, soit 1,98 %. Un débit de 120 L/s devient environ 122,4 L/s.

Lecture inverse : doubler le débit demande de **quadrupler** la hauteur, puisque $\sqrt{4} = 2$. Pour le dimensionnement, les marges de hauteur rapportent donc peu de débit supplémentaire.

Réponse. Le débit augmente d'environ 2 %.

Correction de l'exercice 11 - Fréquence de résonance

$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ est proportionnelle à $\frac{1}{\sqrt{L}}$ à capacité fixée. Deux règles se combinent : la racine divise la variation relative par deux, l'inverse change son signe :

$$\frac{df_0}{f_0} = -\frac{1}{2} \frac{dL}{L} = -\frac{2\%}{2} = -1\%$$

Vérification exacte : $\frac{1}{\sqrt{1,02}} \approx 0,99015$, soit une baisse de 0,99 %. Une fréquence propre de 159 Hz devient environ 157,4 Hz : une bobine légèrement hors tolérance décale peu l'accord. Comme L et C jouent des rôles symétriques dans la formule, une hausse de 2 % de C aurait le même effet.

Réponse. La fréquence propre baisse d'environ 1 %.

Correction de l'exercice 12 - Cumuler deux variations

Pour un produit $S = UI$, les variations relatives s'**ajoutent** :

$$\frac{dS}{S} = \frac{dU}{U} + \frac{dI}{I} = 2\% + 3\% = 5\%$$

Vérification exacte : $1,02 \times 1,03 = 1,0506$, soit 5,06 %. L'écart vient du produit croisé $0,02 \times 0,03 = 0,0006$, négligé par l'approximation. Ainsi 1 000 VA deviennent environ 1 051 VA.

Pour un quotient, les variations relatives se **soustraient**. Par exemple, si U monte de 2 % et I baisse de 3 %, le produit S varie d'environ $2 - 3 = -1\%$.

Réponse. S augmente d'environ 5 % (exactement 5,06 %).

Correction de l'exercice 13 - Incertitude sur une aire

a) L'aire vaut $A = c^2 = 25 \text{ cm}^2$, et $\frac{dA}{dc} = 2c = 10$. L'incertitude sur le côté se propage à l'aire :

$$\Delta A \approx 2c \times \Delta c = 10 \times 0,02 = 0,2 \text{ cm}^2$$

On écrit $A = 25 \pm 0,2 \text{ cm}^2$. **Contrôle exact** : $5,02^2 - 25 = 0,2004$.

b) L'incertitude relative sur le côté vaut $\frac{0,02}{5} = 0,4 \%$. Pour un carré, elle est doublée : $0,8 \%$ sur l'aire, ce que confirme $\frac{0,2}{25} = 0,008$.

Mesurer un côté à $0,4 \%$ près ne donne l'aire qu'à $0,8 \%$ près : l'incertitude se dégrade en passant aux grandeurs calculées.

Réponse. a) $\pm 0,2 \text{ cm}^2$ · b) $0,8 \%$, soit le double de celle du côté.

Correction de l'exercice 14 - Incertitude sur une puissance

a) $P = 230 \times 5 = 1\,150 \text{ W}$. Pour un produit, les incertitudes relatives s'ajoutent :

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta I}{I} = 1 \% + 2 \% = 3 \%$$

b) L'incertitude absolue vaut $1\,150 \times 0,03 = 34,5 \text{ W}$: $P = 1\,150 \pm 34,5 \text{ W}$, c'est-à-dire entre $1\,115,5$ et $1\,184,5 \text{ W}$.

Contrôle par les valeurs extrêmes : $227,7 \times 4,9 \approx 1\,115,7 \text{ W}$ et $232,3 \times 5,1 \approx 1\,184,7 \text{ W}$, en accord avec l'encadrement. Pour améliorer la mesure, c'est l'ampèremètre, l'appareil le moins précis, qu'il faut changer en premier.

Réponse. a) $P = 1\,150 \text{ W}$ à 3% près · b) $\pm 34,5 \text{ W}$.

Correction de l'exercice 15 - Quand l'approximation ne vaut plus

a) Pour un carré, la règle double la variation relative : elle annoncerait $2 \times 50 = +100 \%$ d'aire.

b) En réalité, le rayon est multiplié par $1,5$ et l'aire par

$$1,5^2 = 2,25$$

soit une augmentation de 125% . L'écart avec la règle atteint 25 points.

La cause : 50% n'est pas une **petite** variation. La règle provient de l'approximation affine, qui néglige le terme $(dr)^2$; pour 1% , ce terme ne pesait qu'un centième de point, pour 50% il pèse $0,5^2 = 25$ points. En pratique, au-delà d'une dizaine de pour cent, on revient au calcul exact.

Réponse. a) $+100 \%$ · b) en réalité $+125 \%$: la règle ne vaut que pour de petites variations.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : dimensionner une cuve cylindrique

a) Le volume dépend de r^2 et de h : la part du rayon vaut $2 \times 1 \% = 2 \%$, celle de la hauteur 2% , et pour un produit elles s'ajoutent : environ 4% .

b) Le facteur exact vaut $1,01^2 \times 1,02 = 1,0201 \times 1,02 = 1,040\,502$, soit $4,05 \%$: cinq centièmes de point d'écart.

c) $V = \pi \times 3\,600 \times 120 \approx 1\,357\,168 \text{ cm}^3$, soit environ $1\,357 \text{ L}$. Après les deux hausses, $1\,357 \times 1,040\,502 \approx 1\,412 \text{ L}$, environ 55 L de plus.

d) La variation du volume vaut le double de celle du rayon, d'où l'équation

$$2p = 6\% \Leftrightarrow p = 3\%$$

Le rayon passe à $60 \times 1,03 = 61,8$ cm. **Vérification** : $1,03^2 = 1,0609$, soit 6,09 % et environ 1 440 L. Il aurait fallu +6 % de hauteur, soit 7,2 cm, pour le même effet : agir sur le rayon est plus efficace, mais encombre davantage au sol.

Réponse. a) environ 4 % · b) 4,05 % exactement · c) 1 357 L puis environ 1 412 L · d) environ +3 % sur le rayon, soit 61,8 cm.