

Plaquette 5 - Problèmes : optimiser et estimer

Dérivées et approximation affine — Première STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

La dérivée comme vitesse de variation.

$$v(t) = \frac{dx}{dt}$$

- Position en mètres, temps en secondes : la dérivée est en m/s.
- Toute grandeur qui évolue a une dérivée qui mesure sa **rapidité** d'évolution.

Méthode d'optimisation, en cinq étapes.

1. Nommer l'inconnue et préciser son **intervalle**. 2. Exprimer la grandeur à optimiser en fonction de cette seule inconnue. 3. Dériver. 4. Résoudre $f'(x) = 0$ et **étudier le signe** de f' . 5. Conclure par un tableau de variations et donner la valeur optimale.

Signe de f' autour de x_0	Nature de x_0
– puis +	minimum
+ puis –	maximum

Deux formes qui reviennent sans cesse.

$$f(x) = ax + \frac{b}{x} \implies f'(x) = a - \frac{b}{x^2} \implies x_0 = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c \implies f'(x) = 2ax + b \implies x_0 = -\frac{b}{2a}$$

Estimer une variation. $\Delta y \approx f'(x) \times \Delta x$, et en relatif, l'exposant de la loi multiplie le pourcentage.

⚠ Une solution de $f'(x) = 0$ hors de l'intervalle d'étude est à **rejeter**, et une dérivée qui ne change pas de signe ne donne aucun extremum.

Correction de l'exercice 1 - Vitesse instantanée

a) La vitesse est la dérivée de la position : $v(t) = x'(t) = 10t + 2$, donc

$$v(3) = 10 \times 3 + 2 = 32 \text{ m/s}$$

b) Sur un petit intervalle, le chariot avance à peu près à sa vitesse instantanée : $x(3,1) \approx x(3) + 0,1 \times v(3)$. Avec $x(3) = 45 + 6 = 51 \text{ m}$ et $0,1 \times 32 = 3,2 \text{ m}$, on estime la position à 54,2 m et la distance parcourue à environ 3,2 m.

La valeur exacte est $x(3,1) = 5 \times 9,61 + 6,2 = 54,25 \text{ m}$: la distance réelle vaut 3,25 m, et l'erreur n'est que de 5 cm. Elle vient de l'accélération, qui augmente la vitesse pendant ces 0,1 s.

Réponse. a) 32 m/s · b) environ 3,2 m parcourus (position 54,2 m, exact 54,25 m).

Correction de l'exercice 2 - Un enclos contre un mur

On note x la largeur perpendiculaire au mur, en mètres. Le grillage couvre deux largeurs et une longueur : la longueur vaut $60 - 2x$, avec $0 < x < 30$. L'aire vaut

$$A(x) = x(60 - 2x) = 60x - 2x^2$$

Sa dérivée $A'(x) = 60 - 4x$ s'annule pour $x = 15$; elle est positive avant et négative après, donc A admet un **maximum** en $x = 15$.

L'enclos mesure alors 15 m sur $60 - 30 = 30$ m, pour une aire de 450 m^2 . **Contrôle** : $A(10) = 400$ et $A(20) = 400 \text{ m}^2$, tous deux inférieurs. La longueur vaut le double de la largeur, car le mur remplace un côté.

Réponse. 15 m sur 30 m, pour une aire de 450 m^2 .

Correction de l'exercice 3 - Coût unitaire minimal

Le coût unitaire est le coût total divisé par le nombre de pièces. En séparant la fraction :

$$f(x) = \frac{0,5x^2 + 200}{x} = 0,5x + \frac{200}{x}$$

Sa dérivée vaut $f'(x) = 0,5 - \frac{200}{x^2}$. Elle s'annule quand $0,5x^2 = 200$, soit $x^2 = 400$ et, pour $x > 0$, $x = 20$.

Pour $x < 20$, $\frac{200}{x^2} > 0,5$ et f' est négative ; pour $x > 20$, elle est positive : f admet un **minimum** en 20, qui vaut $10 + 10 = 20 \text{ €}$ la pièce. **Contrôle** : $f(10) = 25 \text{ €}$ et $f(40) = 25 \text{ €}$. À l'optimum, le coût variable par pièce (10 €) égale le coût fixe par pièce (10 €).

Réponse. 20 pièces, pour un coût unitaire de 20 € .

Correction de l'exercice 4 - Une boîte de tôle

On note x le côté de la base et h la hauteur, en cm. La contrainte $x^2h = 4\,000$ donne $h = \frac{4\,000}{x^2}$. La tôle couvre le fond, x^2 , et quatre côtés, $4xh = \frac{16\,000}{x}$:

$$A(x) = x^2 + \frac{16\,000}{x} \quad A'(x) = 2x - \frac{16\,000}{x^2}$$

$A'(x) = 0$ équivaut à $2x^3 = 16\,000$, soit $x^3 = 8\,000$ et $x = 20 \text{ cm}$. La dérivée est négative avant 20 (par exemple $A'(10) = 20 - 160 < 0$) et positive après : c'est un minimum.

La hauteur vaut $\frac{4\,000}{400} = 10 \text{ cm}$ et la tôle $400 + 800 = 1\,200 \text{ cm}^2$. **Contrôles** : $A(10) = 1\,700 \text{ cm}^2$ et $A(30) \approx 1\,433 \text{ cm}^2$. La hauteur optimale vaut la moitié du côté.

Réponse. Base de 20 cm de côté, hauteur 10 cm, pour $1\,200 \text{ cm}^2$ de tôle.

Correction de l'exercice 5 - Vitesse de refroidissement

a) $T(0) = 20 + \frac{80}{1} = 100 \text{ °C}$ et $T(3) = 20 + \frac{80}{4} = 40 \text{ °C}$.

b) La vitesse de refroidissement est la dérivée de la température. Avec $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ et $u = 1 + t$, on obtient

$$T'(t) = -\frac{80}{(1+t)^2} \quad T'(3) = -\frac{80}{16} = -5 \text{ °C/min}$$

Le signe négatif traduit la baisse de température. Au départ, $T'(0) = -80 \text{ °C/min}$: au bout de trois minutes, le refroidissement est **seize fois** plus lent. Quand t devient grand, $\frac{80}{1+t}$ tend vers 0 et la température se rapproche de 20 °C , celle de la pièce.

Réponse. a) 100 °C et 40 °C · b) -5 °C/min .

Correction de l'exercice 6 - Bénéfice maximal

La dérivée vaut $B'(x) = -0,2x + 24$. Elle s'annule pour $0,2x = 24$, soit $x = 120$, qui appartient bien à $[0; 200]$. Elle est positive avant 120 et négative après : B admet un **maximum** en 120.

$$B(120) = -0,1 \times 14\,400 + 24 \times 120 - 200 = -1\,440 + 2\,880 - 200 = 1\,240 \text{ €}$$

Contrôles : $B(100) = -1\,000 + 2\,400 - 200 = 1\,200 \text{ €}$ et

$B(140) = -1\,960 + 3\,360 - 200 = 1\,200 \text{ €}$, égaux de part et d'autre de 120 et inférieurs au maximum.

Le bénéfice devient positif dès une production modeste : $B(8) = -14,4 \text{ €}$ mais $B(9) = 7,9 \text{ €}$, donc il faut vendre au moins 9 pièces.

Réponse. 120 pièces, pour un bénéfice de 1 240 €.

Correction de l'exercice 7 - Temps de cycle optimal

La dérivée vaut $T'(n) = 2 - \frac{800}{n^2}$. Elle s'annule quand $2n^2 = 800$, soit $n^2 = 400$ et, pour $n > 0$, $n = 20$. Avant 20, $\frac{800}{n^2} > 2$ et T' est négative ; après, elle est positive : c'est un **minimum**.

$$T(20) = 40 + \frac{800}{20} = 40 + 40 = 80 \text{ min}$$

Contrôles : $T(10) = 20 + 80 = 100 \text{ min}$ et $T(40) = 80 + 20 = 100 \text{ min}$. À l'optimum, les deux termes sont égaux : le temps de traitement ($2n$) équilibre le temps de lancement ($\frac{800}{n}$). Pour une durée de la forme $an + \frac{b}{n}$, l'optimum est $n_0 = \sqrt{\frac{b}{a}}$, ici $\sqrt{400} = 20$.

Réponse. 20 lots, pour une durée totale de 80 min.

Correction de l'exercice 8 - Consommation minimale

La dérivée vaut $c'(v) = 0,004v - \frac{500}{v^2}$. Elle s'annule quand $0,004v^3 = 500$, soit $v^3 = 125\,000$, et $v = 50 \text{ km/h}$ puisque $50^3 = 125\,000$. Avant 50, le terme $\frac{500}{v^2}$ l'emporte et c' est négative ; après, elle est positive : c'est un **minimum**.

$$c(50) = 0,002 \times 2\,500 + \frac{500}{50} = 5 + 10 = 15 \text{ L aux 100 km}$$

Contrôles : $c(40) = 3,2 + 12,5 = 15,7 \text{ L}$ et $c(70) = 9,8 + 7,14 \approx 16,94 \text{ L}$. Le premier terme traduit la résistance de l'air, qui croît avec la vitesse, le second les pertes fixes, qui se diluent. En pratique, rouler à 50 km/h allonge beaucoup la durée du trajet.

Réponse. 50 km/h, pour 15 L aux 100 km.

Correction de l'exercice 9 - Une loi en cube

a) $P = kv^3$: la variation relative est **triplée**,

$$\frac{dP}{P} = 3 \frac{dv}{v} = 3 \times 5\% = 15\%$$

Vérification exacte : $1,05^3 = 1,157\,625$, soit 15,76 %, moins d'un point d'écart.

b) Si le vent double, la puissance est multipliée par $2^3 = 8$. La règle des petites variations ne s'applique pas : +100 % n'est pas petit, et elle donnerait +300 %, soit un facteur 4, ce qui est faux.

Pour le choix d'un site d'implantation, l'effet du cube est spectaculaire : un site 20 % plus venté produit $1,2^3 = 1,728$ fois plus, soit 73 % de plus.

Réponse. a) environ 15 % (exact : 15,76 %) · b) elle est multipliée par 8.

Correction de l'exercice 10 - Section d'un conducteur

a) À longueur constante, R est proportionnelle à l'inverse de S : la variation relative change de signe, R baisse d'environ 4 %. **Vérification exacte** : $\frac{1}{1,04} \approx 0,9615$, soit une baisse de 3,85 %. Un conducteur plus gros résiste moins.

b) $R = \frac{\rho L}{S}$ est un quotient : les variations relatives se **soustraient**,

$$\frac{dR}{R} = \frac{dL}{L} - \frac{dS}{S} = 4\% - 4\% = 0$$

Et exactement, $\frac{1,04}{1,04} = 1$: la résistance est **inchangée**, l'allongement compensant l'élargissement. Avec +6 % de longueur pour +4 % de section, on obtiendrait environ +2 %.

Réponse. a) R baisse d'environ 4 % · b) R est inchangée.

Correction de l'exercice 11 - Dilatation d'un volume

a) $V = a^3$: la variation relative du volume est le triple de celle de l'arête,

$$\frac{dV}{V} = 3 \frac{da}{a} = 3 \times 0,05\% = 0,15\%$$

b) Le volume initial vaut $10^3 = 1\,000 \text{ cm}^3$, donc la variation vaut $1\,000 \times 0,0015 = 1,5 \text{ cm}^3$.

Contrôle par la différentielle : l'arête augmente de $10 \times 0,0005 = 0,005 \text{ cm}$, et $dV = 3a^2 da = 3 \times 100 \times 0,005 = 1,5 \text{ cm}^3$. Les deux méthodes concordent. C'est pourquoi, en physique, le coefficient de dilatation volumique vaut trois fois le coefficient linéaire.

Réponse. a) environ 0,15 % · b) $1,5 \text{ cm}^3$.

Correction de l'exercice 12 - Extrapoler un relevé

a) La vitesse de montée est la dérivée du niveau : $h'(t) = 6 - 0,5t$, donc $h'(4) = 6 - 2 = 4 \text{ cm/min}$.

b) $h(4) = 40 + 24 - 4 = 60 \text{ cm}$. Par approximation affine,

$$h(4,5) \approx h(4) + 0,5 \times h'(4) = 60 + 2 = 62 \text{ cm}$$

La valeur exacte est $40 + 27 - 0,25 \times 20,25 = 61,9375 \text{ cm}$: l'erreur est d'environ 0,06 cm.

c) $h'(t) = 0$ donne $t = 12 \text{ min}$, la borne droite de l'intervalle. Avant, h' est positive : le niveau monte de moins en moins vite et atteint son maximum $h(12) = 40 + 72 - 36 = 76 \text{ cm}$ à la douzième minute, où la vitesse de montée s'annule.

Réponse. a) 4 cm/min · b) 62 cm estimé, 61,94 cm exactement · c) à $t = 12 \text{ min}$, à 76 cm.

Correction de l'exercice 13 - Deux dimensions à optimiser

On note x la longueur en cm. Le demi-périmètre vaut 24 cm, donc la largeur vaut $24 - x$, avec $0 < x < 24$. L'aire vaut

$$A(x) = x(24 - x) = 24x - x^2$$

Sa dérivée $A'(x) = 24 - 2x$ s'annule pour $x = 12$, positive avant et négative après : c'est un **maximum**. La largeur vaut alors $24 - 12 = 12$ cm : la plaque est un **carré** de 12 cm de côté, d'aire 144 cm^2 .

Contrôle : $A(10) = 140 \text{ cm}^2$ et $A(14) = 140 \text{ cm}^2$, inférieurs à 144. Résultat général : à périmètre fixé, le carré est le rectangle d'aire maximale.

Réponse. Un carré de 12 cm de côté, d'aire 144 cm^2 .

Correction de l'exercice 14 - Un optimum hors intervalle

a) La dérivée vaut $C'(x) = 0,8x - 16$; elle s'annule pour $x = 20$, qui n'appartient **pas** à $[1 ; 15]$. Sur cet intervalle, $0,8x \leq 12 < 16$, donc $C'(x) < 0$: la fonction est décroissante, et son minimum est atteint à la borne $x = 15$,

$$C(15) = 0,4 \times 225 - 240 + 500 = 90 - 240 + 500 = 350 \text{ €}$$

b) Sur $[1 ; 12]$, la fonction reste décroissante : le minimum est en $x = 12$, avec $C(12) = 57,6 - 192 + 500 = 365,60 \text{ €}$.

Quand la dérivée ne s'annule pas dans l'intervalle d'étude, l'optimum est sur une **borne** : il ne faut jamais retenir une valeur trouvée sans vérifier qu'elle appartient à l'intervalle.

Réponse. a) 15 machines, pour 350 € · b) 12 machines, pour 365,60 €.

Correction de l'exercice 15 - Puissance transmise

a) P est un produit de N et M (le coefficient 0,105 ne change pas les variations relatives) : elles s'ajoutent,

$$\frac{dP}{P} = \frac{dN}{N} + \frac{dM}{M} = 3\% - 1\% = 2\%$$

Vérification exacte : $1,03 \times 0,99 = 1,0197$, soit 1,97 %.

b) $P = 0,105 \times 1\,500 \times 40 = 0,105 \times 60\,000 = 6\,300 \text{ W}$. Après les variations, $6\,300 \times 1,0197 \approx 6\,424 \text{ W}$, soit environ 124 W de plus. **Contrôle direct** : $0,105 \times 1\,545 \times 39,6 \approx 6\,424 \text{ W}$. Accélérer compense largement la légère perte de couple.

Réponse. a) environ +2 % · b) 6 300 W puis environ 6 424 W.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : dimensionner une citerne

a) La contrainte $x^2 h = 32$ donne $h = \frac{32}{x^2}$. La tôle couvre le fond, x^2 , et quatre parois, $4xh = \frac{128}{x}$:

$$A(x) = x^2 + \frac{128}{x}$$

b) $A'(x) = 2x - \frac{128}{x^2}$ s'annule quand $2x^3 = 128$, soit $x^3 = 64$ et $x = 4$ m. Avant 4, A' est négative, après positive : c'est un minimum. La hauteur vaut $\frac{32}{16} = 2$ m et la surface $16 + 32 = 48 \text{ m}^2$.

c) Le coût vaut $48 \times 45 = 2\,160 \text{ €}$.

d) 4 m est précisément le côté optimal : la proposition n'entraîne **aucun surcoût**. Pour comparaison, $x = 2$ donnerait 68 m^2 , soit 3 060 € (900 € de plus), et $x = 6$ environ $57,33 \text{ m}^2$, soit environ 2 580 € (420 € de plus). Comme pour la boîte de tôle, la hauteur optimale vaut la moitié du côté.

Réponse. a) $h = \frac{32}{x^2}$ et $A(x) = x^2 + \frac{128}{x}$ · b) 4 m de côté et 2 m de haut, soit 48 m^2 · c)

2 160 € · d) aucun surcoût, c'est l'optimum.