

Plaquette 1 - Produit, quotient et approximation locale

Dérivées et approximation affine — Première STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules du cours.

— Dérivées usuelles : $(x^n)' = nx^{n-1}$, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $(\cos x)' = -\sin x$,
 $(\sin x)' = \cos x$.

— **Produit** : $(uv)' = u'v + uv'$.

— **Quotient** : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

— Notation différentielle : $f(x) = \frac{dy}{dx}$, avec $y = f(x)$. Un petit accroissement s'écrit $dy \approx f(x) dx$.

— **Approximation affine** au voisinage de a (pour h petit) :

$$f(a+h) \approx f(a) + h \times f'(a)$$

C'est l'équation de la tangente utilisée comme approximation de la courbe.

— **Variation relative** : $\frac{dy}{y} \approx \frac{f'(x)}{f(x)} dx$, souvent exprimée en pourcentage.

— Plus h est petit, meilleure est l'approximation ; l'erreur croît quand on s'éloigne de a .

Correction de l'exercice 1 - Dérivée d'un produit

Formule du cours : $(uv)' = u'v + uv'$.

— On pose $u(x) = 3x + 1$ et $v(x) = x^2 - 2$, donc $u'(x) = 3$ et $v'(x) = 2x$.

$$f(x) = 3(x^2 - 2) + (3x + 1) \times 2x$$

— On développe : $3x^2 - 6 + 6x^2 + 2x$.

— On réduit : $f(x) = 9x^2 + 2x - 6$.

— Contrôle : en développant f d'abord, $f(x) = 3x^3 + x^2 - 6x - 2$, puis en dérivant : $9x^2 + 2x - 6$. Même résultat.

Réponse. $f(x) = 9x^2 + 2x - 6$.

Correction de l'exercice 2 - Dérivée d'un quotient

Formule du cours : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

— $u(x) = 2x + 5$, $v(x) = x - 3$, donc $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 1$.

$$f(x) = \frac{2(x-3) - (2x+5)}{(x-3)^2} = \frac{2x-6-2x-5}{(x-3)^2} = \frac{-11}{(x-3)^2}$$

— Le dénominateur est un carré, donc strictement positif ; le numérateur est négatif : $f(x) < 0$.

— Donc f est **strictement décroissante** sur $] -\infty ; 3[$ et sur $] 3 ; +\infty [$ (séparément, car la fonction n'est pas définie en 3).

Réponse. $f(x) = \frac{-11}{(x-3)^2} < 0$: f décroît sur chacun des deux intervalles.

Correction de l'exercice 3 - Dérivées trigonométriques

On utilise $(\cos x)' = -\sin x$ et $(\sin x)' = \cos x$.

a) $f'(x) = -3 \sin x - 2 \cos x$.

b) Produit avec $u = x$ et $v = \sin x$: $g'(x) = 1 \times \sin x + x \times \cos x = \sin x + x \cos x$.

c) Quotient avec $u = \cos x$ et $v = x$:

$$h'(x) = \frac{-\sin x \times x - \cos x \times 1}{x^2} = \frac{-x \sin x - \cos x}{x^2}$$

Piège. La dérivée du cosinus porte un signe **moins** : c'est l'erreur la plus fréquente.

Réponse. a) $-3 \sin x - 2 \cos x$ · b) $\sin x + x \cos x$ · c) $\frac{-x \sin x - \cos x}{x^2}$.

Correction de l'exercice 4 - Dérivée avec une racine carrée

Première méthode : produit. Avec $u = x$ et $v = \sqrt{x}$:

— $u' = 1$ et $v' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$f'(x) = \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{3\sqrt{x}}{2}$$

Deuxième méthode : puissance. $x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}}$, donc $f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3\sqrt{x}}{2}$.

— Les deux méthodes donnent le même résultat, ce qui valide le calcul.

Réponse. $f'(x) = \frac{3\sqrt{x}}{2}$.

Correction de l'exercice 5 - Notation différentielle

a) On dérive par rapport à r :

$$\frac{dV}{dr} = \frac{4}{3}\pi \times 3r^2 = 4\pi r^2$$

— Remarque physique : c'est exactement l'**aire** de la sphère. Augmenter le rayon d'une épaisseur dr ajoute une « pelure » d'aire $4\pi r^2$ et d'épaisseur dr .

b) Pour $r = 5$: $\frac{dV}{dr} = 4\pi \times 25 = 100\pi \approx 314,2 \text{ cm}^2$.

— Donc $dV \approx 314,2 \times dr$: une variation de rayon de 0,1 cm change le volume d'environ $31,4 \text{ cm}^3$.

Réponse. a) $4\pi r^2$ · b) $dV \approx 100\pi dr \approx 314,2 dr$.

Correction de l'exercice 6 - Approximation affine

Formule du cours : $f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)$.

— $f(100) = 10$ et $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, donc $f'(100) = \frac{1}{20} = 0,05$.

— Avec $h = 1$:

$$\sqrt{101} \approx 10 + 1 \times 0,05 = 10,05$$

— Valeur exacte : $\sqrt{101} \approx 10,0499$.

- L'erreur est d'environ 0,000 1 : l'approximation est excellente, car $h = 1$ est petit devant $a = 100$.

Réponse. $\sqrt{101} \approx 10,05$ (valeur réelle $\approx 10,0499$).

Correction de l'exercice 7 - Approximation d'un carré

- a) $f(7) = 49$ et $f'(x) = 2x$, donc $f'(7) = 14$.

$$f(7+h) \approx 49 + 14h$$

- b) Avec $h = 0,02$: $7,02^2 \approx 49 + 14 \times 0,02 = 49 + 0,28 = 49,28$.

— Valeur exacte : $7,02^2 = 49,2804$.

- L'écart est de 0,000 4, ce qui correspond exactement à $h^2 = 0,0004$: l'approximation affine « oublie » le terme en h^2 , négligeable quand h est petit.

Réponse. a) $f(7+h) \approx 49 + 14h$ · b) $\approx 49,28$ (exact : 49,280 4).

Correction de l'exercice 8 - Variation relative

- a) On écrit $R = kd^{-2}$, donc

$$\frac{dR}{dd} = -2kd^{-3} = \frac{-2k}{d^3}$$

- b) On calcule la variation **relative** :

$$\frac{dR}{R} \approx \frac{\frac{-2k}{d^3}}{\frac{k}{d^2}} dd = \frac{-2}{d} dd = -2 \times \frac{dd}{d}$$

- Avec $\frac{dd}{d} = 1\% = 0,01$: $\frac{dR}{R} \approx -0,02$, soit une **baisse d'environ 2 %**.

- Règle à retenir : dans une puissance, les variations relatives sont multipliées par l'exposant (ici -2).

Réponse. a) $\frac{-2k}{d^3}$ · b) la résistance baisse d'environ 2 %.

Correction de l'exercice 9 - Problème : dilatation d'une tige

- a) $V = \pi \times (0,01)^2 \times 2 = 2\pi \times 10^{-4} \approx 6,28 \times 10^{-4} \text{ m}^3$.

— En cm^3 : $6,28 \times 10^{-4} \text{ m}^3 = 628 \text{ cm}^3$ (car $1 \text{ m}^3 = 10^6 \text{ cm}^3$).

- b) À L fixé, $\frac{dV}{dr} = 2\pi rL = 2\pi \times 0,01 \times 2 = 0,04\pi \approx 0,1257 \text{ m}^2/\text{m}$.

— $dV \approx 0,1257 \times 0,0001 \approx 1,257 \times 10^{-5} \text{ m}^3$, soit environ $12,6 \text{ cm}^3$.

- Contrôle de l'ordre de grandeur : une hausse de rayon de 1 % doit augmenter le volume d'environ 2 %, et 2 % de 628 cm^3 font $12,6 \text{ cm}^3$. Cohérent.

Réponse. a) $V = 2\pi \times 10^{-4} \text{ m}^3 \approx 628 \text{ cm}^3$ · b) $dV \approx 12,6 \text{ cm}^3$.

Correction de l'exercice 10 - Problème : incertitude sur une puissance

- a) $P = 20 \times 9 = 180 \text{ W}$.

- b) On dérive par rapport à I :

$$\frac{dP}{dI} = 2RI = 2 \times 20 \times 3 = 120 \text{ W/A}$$

- $dP \approx 120 \times 0,05 = 6 \text{ W}$.
- La puissance vaut donc 180 W à environ 6 W près, soit une incertitude relative de $\frac{6}{180} \approx 3,3 \%$.
- Cohérent avec la règle des puissances : l'incertitude relative sur I vaut $\frac{0,05}{3} \approx 1,7 \%$, et elle est doublée par l'exposant 2.

Réponse. a) 180 W · b) $dP \approx 6 \text{ W}$ (soit $\approx 3,3 \%$).

Correction de l'exercice 11 - Produit avec un cosinus

a) On pose $u(x) = x$ et $v(x) = \cos x$, de dérivées $u' = 1$ et $v' = -\sin x$. La formule du produit $(uv)' = u'v + uv'$ donne

$$f'(x) = \cos x - x \sin x$$

b) En 0 : $\cos 0 = 1$ et $0 \times \sin 0 = 0$, donc $f(0) = 1$. En π : $\cos \pi = -1$ et $\sin \pi = 0$, donc $f(\pi) = -1$.

- Comme $f(0) = 0$, la tangente à l'origine a pour équation $y = 1 \times (x - 0) + 0$, soit $y = x$: près de 0 , $x \cos x \approx x$.
- Dériver chaque facteur et multiplier, $1 \times (-\sin x)$, serait faux : la dérivée d'un produit n'est pas le produit des dérivées.

Réponse. a) $f(x) = \cos x - x \sin x$ · b) $f(0) = 1$, $f(\pi) = -1$; tangente $y = x$.

Correction de l'exercice 12 - Maximum d'un quotient

a) On pose $u = 4x$ et $v = x^2 + 4$, de dérivées $u' = 4$ et $v' = 2x$. Le numérateur de la formule du quotient vaut $4(x^2 + 4) - 4x \times 2x = 16 - 4x^2$:

$$f(x) = \frac{16 - 4x^2}{(x^2 + 4)^2} = \frac{4(2 - x)(2 + x)}{(x^2 + 4)^2}$$

Le dénominateur est strictement positif : f a le signe de $(2 - x)(2 + x)$, positif entre -2 et 2 , négatif à l'extérieur.

b) f croît sur $[-2; 2]$ puis décroît sur $[2; +\infty[$: elle admet un maximum en $x = 2$, qui vaut $f(2) = \frac{8}{8} = 1$.

- **Contrôle** : $f(1) = \frac{4}{5} = 0,8$ et $f(4) = \frac{16}{20} = 0,8$, inférieurs à 1 . Par symétrie, le minimum vaut $f(-2) = -1$.

Réponse. a) $f(x) = \frac{16 - 4x^2}{(x^2 + 4)^2}$, positive sur $]-2; 2[$ · b) maximum 1 en $x = 2$.

Correction de l'exercice 13 - Problème : une résistance qui chauffe

a) Avec $\left(\frac{1}{R}\right)' = -\frac{1}{R^2}$:

$$\frac{dI}{dR} = -\frac{12}{R^2} = -\frac{12}{16} = -0,75 \text{ A par ohm}$$

Le signe négatif traduit qu'une résistance plus grande laisse passer moins de courant.

b) Pour $dR = 0,1 \Omega$, $dI \approx -0,75 \times 0,1 = -0,075 \text{ A}$. L'intensité initiale vaut $\frac{12}{4} = 3 \text{ A}$, d'où l'estimation $3 - 0,075 = 2,925 \text{ A}$.

- La valeur exacte est $\frac{12}{4,1} \approx 2,927 \text{ A}$: l'écart est d'environ $0,002 \text{ A}$.

- En valeur relative, R augmente de 2,5 % et I baisse d'environ 2,5 % : pour un inverse, la variation relative change de signe.

Réponse. a) $-0,75 \text{ A}/\Omega$ · b) $I \approx 2,925 \text{ A}$ (exact $\approx 2,927 \text{ A}$).

Correction de l'exercice 14 - Repérer une erreur sur un quotient

L'élève a divisé la dérivée du numérateur par celle du dénominateur : la dérivée d'un quotient n'est **pas** le quotient des dérivées. On applique la formule avec $u = 3x$ et $v = x + 1$, donc $u' = 3$ et $v' = 1$:

$$f(x) = \frac{3(x+1) - 3x \times 1}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2}$$

En $x = 1$, on obtient $f(1) = \frac{3}{4} = 0,75$, et non 3.

- **Contrôle numérique** : $f(1) = 1,5$ et $f(1,01) = \frac{3,03}{2,01} \approx 1,50746$. Le taux de variation vaut $\frac{0,00746}{0,01} \approx 0,746$, très proche de 0,75.
- La dérivée n'est pas constante : f croît de moins en moins vite, ce que la réponse « 3 » ne pouvait pas traduire.

Réponse. $f(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$, donc $f(1) = 0,75$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : dérivée et tangente

a) Quotient avec $u = x$ et $v = x + 2$:

$$f(x) = \frac{1 \times (x+2) - x \times 1}{(x+2)^2} = \frac{2}{(x+2)^2}$$

b) $f(2) = \frac{2}{4} = 0,5$ et $f(2) = \frac{2}{16} = 0,125$.

— Tangente : $y = 0,125(x - 2) + 0,5 = 0,125x + 0,25$.

c) Approximation affine avec $h = 0,1$:

— $f(2,1) \approx f(2) + 0,1 \times f'(2) = 0,5 + 0,0125 = 0,5125$.

— Valeur exacte : $f(2,1) = \frac{2,1}{4,1} \approx 0,5122$.

— L'écart est d'environ 0,0003 : l'approximation est très satisfaisante pour un petit accroissement.

Réponse. a) $f(x) = \frac{2}{(x+2)^2}$ · b) $y = 0,125x + 0,25$ · c) $\approx 0,5125$ (exact $\approx 0,5122$).