

Plaquette 3 - Tangente et approximation affine

Dérivées et approximation affine — Première STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Équation de la tangente au point d'abscisse a :

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Approximation affine. Pour h petit :

$$f(a + h) \approx f(a) + h \times f'(a)$$

C'est la même droite, lue autrement : on part de $f(a)$ et on avance de la pente multipliée par le petit pas h .

Les approximations les plus utiles.

Fonction	Point a	Approximation pour h petit
x^2	a	$(a + h)^2 \approx a^2 + 2ah$
x^3	a	$(a + h)^3 \approx a^3 + 3a^2h$
$\sqrt{x}$	a	$\sqrt{a + h} \approx \sqrt{a} + \frac{h}{2\sqrt{a}}$
$\frac{1}{x}$	a	$\frac{1}{a + h} \approx \frac{1}{a} - \frac{h}{a^2}$
$\sin x$	0	$\sin h \approx h$
$\cos x$	0	$\cos h \approx 1$

Qualité de l'approximation.

- L'erreur **croît** quand h s'éloigne de 0 : elle est de l'ordre de h^2 .
- Diviser h par 10 divise l'erreur par environ 100.
- Pour une courbe qui « tourne » vers le haut, la tangente passe **en dessous** : l'approximation sous-estime.

⚠ L'approximation affine n'est valable **qu'au voisinage** de a : hors de ce voisinage, elle donne des résultats absurdes ($\sqrt{100 + 500} \approx 35$ au lieu de 24,5).

Correction de l'exercice 1 - Une première tangente

On applique la formule de la tangente $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ avec $a = 3$. On calcule $f(3) = 9$, puis $f'(x) = 2x$ donne le coefficient directeur $f'(3) = 6$. En substituant,

$$y = 9 + 6(x - 3) = 9 + 6x - 18 = 6x - 9$$

Contrôle : pour $x = 3$, on retrouve $y = 18 - 9 = 9 = f(3)$, donc la droite passe bien par le point de contact ; et sa pente 6 est positive, comme celle de la parabole x^2 en un point d'abscisse positive. La différence $x^2 - (6x - 9) = (x - 3)^2$ montre que la courbe reste au-dessus de cette tangente.

Réponse. $y = 6x - 9$.

Correction de l'exercice 2 - Approcher un carré

L'approximation affine remplace la courbe par sa tangente au voisinage de a :

$$f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)$$

Avec $a = 3$ et $h = 0,02$: $3,02^2 \approx 9 + 0,02 \times 6 = 9 + 0,12 = 9,12$.

La valeur exacte est $3,02^2 = 9,1204$: l'erreur vaut 0,0004, soit environ 0,004 %. Elle vient exactement du terme h^2 , puisque $(3+h)^2 = 9 + 6h + h^2$ et que l'approximation néglige $h^2 = 0,0004$. Ce terme étant positif, l'approximation **sous-estime** la valeur : la tangente est sous la parabole.

Réponse. $3,02^2 \approx 9,12$ (exact : 9,1204).

Correction de l'exercice 3 - Approcher un cube

On choisit $f(x) = x^3$, au point $a = 2$ où l'on connaît $f(2) = 8$. Sa dérivée $f'(x) = 3x^2$ donne la pente $f'(2) = 12$. Avec le pas $h = 0,01$,

$$2,01^3 \approx 8 + 0,01 \times 12 = 8,12$$

La valeur exacte est $2,01^3 = 8,120601$: l'erreur n'est que d'environ 0,0006, car le pas est petit.

Vérification : la tangente en 2 a pour équation $y = 8 + 12(x - 2) = 12x - 16$, et pour $x = 2,01$ elle donne $24,12 - 16 = 8,12$, la même valeur. Approcher par la tangente ou par la formule $f(a) + hf'(a)$, c'est le même calcul.

Réponse. $2,01^3 \approx 8,12$ (exact : 8,120601).

Correction de l'exercice 4 - Approcher une racine

On choisit $f(x) = \sqrt{x}$ au point commode $a = 100$, carré parfait le plus proche, où $f(100) = 10$. La dérivée $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ donne la pente $\frac{1}{2 \times 10} = 0,05$. Avec le pas $h = 0,6$:

$$\sqrt{100,6} \approx 10 + 0,6 \times 0,05 = 10,03$$

La valeur exacte est 10,029955 : l'erreur est inférieure à 5×10^{-5} . Le pas 0,6 est petit devant 100, d'où cette précision. Il faut toujours partir du carré parfait le plus proche : avec $a = 81$, le pas 19,6 serait beaucoup trop grand.

Réponse. $\sqrt{100,6} \approx 10,03$.

Correction de l'exercice 5 - Une autre racine

On part de $a = 9$, car $\sqrt{9} = 3$. La dérivée $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ donne la pente $\frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{6}$. Avec $h = 0,1$:

$$\sqrt{9,1} \approx 3 + \frac{0,1}{6} \approx 3,016667$$

La valeur exacte est 3,016621 : l'erreur est d'environ 0,000046, soit de l'ordre de 0,0015 %.

Ici l'approximation **surestime** la valeur. La courbe de la racine carrée s'infléchit vers le bas (sa pente diminue quand x augmente), donc sa tangente passe au-dessus d'elle. C'est l'inverse de la parabole x^2 , dont la pente augmente.

Réponse. $\sqrt{9,1} \approx 3,0167$ (exact : 3,016621).

Correction de l'exercice 6 - Approcher un inverse

On choisit $f(x) = \frac{1}{x}$ au point $a = 5$, où $f(5) = 0,2$. La dérivée $-\frac{1}{x^2}$ donne la pente $-\frac{1}{25} = -0,04$. Avec $h = 0,1$:

$$\frac{1}{5,1} \approx 0,2 + 0,1 \times (-0,04) = 0,2 - 0,004 = 0,196$$

La valeur exacte est 0,196 078 : l'erreur est inférieure à 10^{-4} .

La pente est négative, ce qui est cohérent avec la décroissance de la fonction inverse : augmenter le dénominateur diminue le quotient. Une estimation supérieure à 0,2 aurait signalé une erreur de signe.

Réponse. $\frac{1}{5,1} \approx 0,196$.

Correction de l'exercice 7 - Un pas négatif

On choisit $f(x) = x^2$ au point $a = 10$, où $f(10) = 100$ et $f'(10) = 20$. Le nombre 9,98 est **avant** 10 : le pas vaut $h = -0,02$, négatif.

$$9,98^2 \approx 100 + (-0,02) \times 20 = 100 - 0,4 = 99,6$$

La valeur exacte est 99,6004 : l'erreur vaut 0,0004, c'est-à-dire h^2 , comme pour tout carré. La formule fonctionne aussi bien pour un pas négatif. Le piège est d'oublier le signe de h et de trouver 100,4, ce qui est absurde puisque $9,98 < 10$ donne un carré inférieur à 100.

Réponse. $9,98^2 \approx 99,6$ (exact : 99,6004).

Correction de l'exercice 8 - Approximations trigonométriques

On approche au voisinage de $a = 0$, l'angle étant en radians, avec la formule $f(h) \approx f(0) + hf'(0)$.

Sinus. $\sin 0 = 0$ et $(\sin x)' = \cos x$ donne la pente $\cos 0 = 1$: $\sin(0,05) \approx 0,05$. La valeur exacte est 0,049 979.

Cosinus. $\cos 0 = 1$ et $(\cos x)' = -\sin x$ donne la pente $-\sin 0 = 0$: $\cos(0,05) \approx 1$. La valeur exacte est 0,998 75.

$$\sin h \approx h \quad \cos h \approx 1 \quad (h \text{ petit, en radians})$$

C'est l'approximation des petites oscillations en physique (pendule). Elle n'est valable qu'en **radians** : en degrés, $\sin(0,05^\circ)$ vaut environ 0,000 87, pas 0,05.

Réponse. $\sin(0,05) \approx 0,05$ et $\cos(0,05) \approx 1$.

Correction de l'exercice 9 - L'erreur grandit avec h

On approche $f(3 + h)$ par $9 + 6h$ et on compare à la valeur exacte.

Pour $h = 0,1$: $9 + 0,6 = 9,6$ contre $3,1^2 = 9,61$, erreur 0,01.

Pour $h = 0,5$: $9 + 3 = 12$ contre $3,5^2 = 12,25$, erreur 0,25.

h	0,1	0,5
erreur	0,01	0,25

Le pas est multiplié par 5, l'erreur par 25 : elle varie comme h^2 . En effet,

$$(3 + h)^2 - (9 + 6h) = h^2$$

et $0,1^2 = 0,01$, $0,5^2 = 0,25$. L'approximation affine n'est donc fiable que pour de petits écarts : doubler le pas quadruple l'erreur.

Réponse. Erreur de 0,01 pour $h = 0,1$, de 0,25 pour $h = 0,5$: elle varie comme h^2 .

Correction de l'exercice 10 - Aire d'un disque

L'aire vaut $A(r) = \pi r^2$, de dérivée $A'(r) = 2\pi r$. En $r = 10$ cm, $A'(10) = 20\pi \approx 62,83$ cm² par cm. Le rayon augmente de 1 mm, soit $h = 0,1$ cm :

$$\Delta A \approx A'(10) \times h = 62,83 \times 0,1 \approx 6,28 \text{ cm}^2$$

La valeur exacte est $\pi(10,1^2 - 10^2) = \pi \times 2,01 \approx 6,31$ cm² : l'erreur est d'environ 0,03 cm², soit 0,5 %.

Géométriquement, $2\pi r \times h$ est l'aire d'une bande fine de largeur h le long du bord, de longueur le périmètre. Rapportée à l'aire initiale $100\pi \approx 314,16$ cm², l'augmentation est d'environ 2 % pour 1 % sur le rayon.

Réponse. Environ 6,28 cm² (valeur exacte : 6,31 cm²).

Correction de l'exercice 11 - Volume d'un cube

Le volume vaut $V(a) = a^3$, de dérivée $V'(a) = 3a^2$. En $a = 5$, $V'(5) = 75$ cm³ par cm. Avec $h = 0,02$ cm :

$$\Delta V \approx 75 \times 0,02 = 1,5 \text{ cm}^3$$

La valeur exacte est $5,02^3 - 125 = 1,506\,008$ cm³ : l'erreur vaut environ 0,006 cm³.

En valeur relative, le volume initial étant 125 cm³, la variation vaut $\frac{1,5}{125} = 1,2$ %, pour une variation de l'arête de $\frac{0,02}{5} = 0,4$ %. Le rapport est 3, l'exposant de a^3 : pour une puissance n , les petites variations relatives sont multipliées par n .

Réponse. Environ 1,5 cm³ (exact : 1,506 cm³).

Correction de l'exercice 12 - Tangente à une fonction quotient

On calcule $f(2) = 0,5$ et, avec $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, la pente $f'(2) = -\frac{1}{4} = -0,25$. La tangente a pour équation

$$y = 0,5 - 0,25(x - 2) = -0,25x + 1$$

Pour $x = 2,05$, elle donne $-0,25 \times 2,05 + 1 = 0,4875$: c'est l'approximation de $\frac{1}{2,05}$.

La valeur exacte est $\frac{1}{2,05} \approx 0,487\,805$: l'erreur vaut environ 0,0003. **Contrôle** : la tangente coupe l'axe des abscisses en $x = 4$, le double de l'abscisse du point de contact, propriété des tangentes à l'hyperbole $y = \frac{1}{x}$.

Réponse. $y = -0,25x + 1$ et $\frac{1}{2,05} \approx 0,4875$.

Correction de l'exercice 13 - Une approximation abusive

La valeur exacte est $\sqrt{600} \approx 24,49$: le résultat 35 est faux de plus de 10 unités, soit 43 %. La cause est le pas $h = 500$, qui n'a rien de petit devant $a = 100$: l'approximation affine ne vaut qu'au **voisinage** du point de départ.

Calcul correct. On part du carré parfait le plus proche, $625 = 25^2$. Le pas vaut $h = 600 - 625 = -25$ et la pente $\frac{1}{2 \times 25} = 0,02$:

$$\sqrt{600} \approx 25 + (-25) \times 0,02 = 25 - 0,5 = 24,5$$

L'erreur n'est plus que d'environ 0,005. Le choix du point de référence décide de la qualité du résultat : on le prend le plus proche possible de la valeur cherchée.

Réponse. Le pas 500 est bien trop grand ; en partant de 625, on obtient $\sqrt{600} \approx 24,5$.

Correction de l'exercice 14 - Dilatation d'une tige

a) On développe : $L(\theta) = 2\,000 + 2\,000 \times 1,2 \times 10^{-5}\theta = 2\,000 + 0,024\theta$. La fonction est affine, sa dérivée est constante : $L'(\theta) = 0,024 \text{ mm/}^\circ\text{C}$.

b) La variation de longueur est la dérivée multipliée par la variation de température :

$$\Delta L = L'(\theta) \times \Delta\theta = 0,024 \times 60 = 1,44 \text{ mm}$$

Ici le résultat est **exact**, et non approché : pour une fonction affine, la courbe est sa propre tangente.

L'allongement relatif vaut $\frac{1,44}{2\,000} = 0,072\%$. Sur 20 m de rail, la même hausse donnerait $20\,000 \times 1,2 \times 10^{-5} \times 60 = 14,4 \text{ mm}$: d'où les joints de dilatation.

Réponse. a) $L'(\theta) = 0,024 \text{ mm/}^\circ\text{C}$ · b) un allongement de 1,44 mm.

Correction de l'exercice 15 - Prévoir avec la tangente

a) $r(50) = -0,002 \times 2\,500 + 0,24 \times 50 + 20 = -5 + 12 + 20 = 27\%$. La dérivée vaut $r'(x) = -0,004x + 0,24$, donc $r'(50) = -0,2 + 0,24 = 0,04$: 100 tours/min de plus font gagner environ 0,04 point de rendement.

b) Avec un pas de 2 :

$$r(52) \approx r(50) + 2 \times r'(50) = 27 + 0,08 = 27,08\%$$

La valeur exacte est $-5,408 + 12,48 + 20 = 27,072\%$: l'erreur n'est que de 0,008 point.

La dérivée s'annule pour $-0,004x + 0,24 = 0$, soit $x = 60$: le rendement maximal vaut $r(60) = -7,2 + 14,4 + 20 = 27,2\%$. À 5 000 tours/min, on est déjà proche de l'optimum.

Réponse. a) $r(50) = 27\%$ et $r'(50) = 0,04$ · b) 27,08 % estimé contre 27,072 % réellement.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : une cuve cylindrique

a) $V = \pi \times 80^2 \times 150 = \pi \times 960\,000 \approx 3\,015\,929 \text{ cm}^3$, soit environ 3 016 L.

b) À hauteur fixée, $V(r) = 150\pi r^2$, donc

$$\frac{dV}{dr} = 300\pi r = 300\pi \times 80 \approx 75\,398 \text{ cm}^3 \text{ par cm}$$

c) Le rayon augmente de 5 mm = 0,5 cm : $dV \approx 75\,398 \times 0,5 \approx 37\,699 \text{ cm}^3$, soit environ 37,7 L.

d) Avec $r = 80,5 \text{ cm}$, $V = 150\pi \times 6\,480,25 \approx 3\,053\,746 \text{ cm}^3$. La variation exacte vaut environ $37\,817 \text{ cm}^3$, soit 37,8 L ; l'écart avec l'estimation est d'environ 118 cm^3 , soit une erreur relative de $\frac{118}{37\,817} \approx 0,31\%$.

L'approximation est donc très satisfaisante. En relatif, 0,625 % sur le rayon donne environ 1,25 % sur le volume : le rapport 2 vient du carré dans $\pi r^2 h$.

Réponse. a) environ 3 016 L · b) environ $75\,398 \text{ cm}^3/\text{cm}$ · c) environ 37,7 L · d) 37,8 L réellement, soit 0,31 % d'erreur.