

Plaquette 5 - Problèmes : optimiser et estimer

Dérivées et approximation affine — Première STI2D

Exercices

Méthode

Une dérivée répond à deux questions d'ingénieur : « **à quelle vitesse cela change-t-il ?** » et « **où est l'optimum ?** ». Cette dernière plaquette enchaîne les problèmes complets — vitesse, coût minimal, surface minimale, temps de cycle — avec la même méthode à chaque fois.

Exercice 1 - Vitesse instantanée

Un chariot parcourt $x(t) = 5t^2 + 2t$ mètres en t secondes.

- Calculer sa vitesse à l'instant $t = 3$ s.
- Estimer la distance parcourue entre $t = 3$ et $t = 3,1$ s.

Exercice 2 - Un enclos contre un mur

On dispose de 60 m de grillage pour clôturer un enclos rectangulaire adossé à un mur, qui ne nécessite pas de grillage.

Déterminer les dimensions qui donnent l'aire maximale.

Exercice 3 - Coût unitaire minimal

Le coût total de production de x pièces est $C(x) = 0,5x^2 + 200$ euros, pour $x > 0$.

Déterminer la production qui minimise le coût unitaire.

Exercice 4 - Une boîte de tôle

On fabrique une boîte parallélépipédique à base carrée, sans couvercle, de volume $4\,000\text{ cm}^3$.

Déterminer les dimensions qui minimisent la surface de tôle.

Exercice 5 - Vitesse de refroidissement

Une pièce refroidit selon $T(t) = 20 + \frac{80}{1+t}$ (en °C, t en minutes).

- Calculer $T(0)$ et $T(3)$.
- Calculer la vitesse de refroidissement à $t = 3$ min.

Exercice 6 - Bénéfice maximal

Le bénéfice d'un atelier est $B(x) = -0,1x^2 + 24x - 200$ euros pour x pièces vendues, $0 \leq x \leq 200$.

Déterminer la production qui maximise le bénéfice.

Exercice 7 – Temps de cycle optimal

La durée totale d'une série vaut $T(n) = 2n + \frac{800}{n}$ minutes, où n est le nombre de lots, $n > 0$.

Déterminer le nombre de lots qui minimise la durée.

Exercice 8 – Consommation minimale

La consommation d'un camion suit $c(v) = 0,002v^2 + \frac{500}{v}$ litres aux 100 km, à la vitesse v en km/h.

Déterminer la vitesse la plus économique.

Exercice 9 – Une loi en cube

La puissance récupérée par une éolienne suit $P = kv^3$, où v est la vitesse du vent.

- a) Le vent forcit de 5 %. De combien augmente la puissance ?
- b) Le vent double. Que devient la puissance ?

Exercice 10 – Section d'un conducteur

La résistance d'un fil vaut $R = \frac{\rho L}{S}$.

- a) La section augmente de 4 %, à longueur constante. Que devient R ?
- b) On allonge aussi le fil de 4 %. Que devient R ?

Exercice 11 – Dilatation d'un volume

Un bloc métallique cubique voit son arête augmenter de 0,05 % sous l'effet de la chaleur.

- a) De combien augmente son volume ?
- b) Le bloc mesurait 10 cm d'arête. Calculer la variation de volume en cm^3 .

Exercice 12 – Extrapoler un relevé

Un capteur de niveau relève $h(t) = 40 + 6t - 0,25t^2$ centimètres, t en minutes, pour $0 \leq t \leq 12$.

- a) Calculer la vitesse de montée à $t = 4$ min.
- b) Estimer le niveau à $t = 4,5$ min, puis comparer.
- c) À quel instant le niveau est-il maximal ?

Exercice 13 – Deux dimensions à optimiser

Une plaque rectangulaire doit avoir un périmètre de 48 cm.

Déterminer les dimensions qui rendent son aire maximale.

Exercice 14 – Un optimum hors intervalle

Le coût horaire d'un atelier vaut $C(x) = 0,4x^2 - 16x + 500$ euros, où x est le nombre de machines, avec $1 \leq x \leq 15$.

- Déterminer le nombre de machines qui minimise le coût.
- Reprendre la question si l'atelier ne peut accueillir que 12 machines.

Exercice 15 – Puissance transmise

La puissance transmise par un arbre vaut $P = 0,105 \times N \times M$ watts, avec N en tours par minute et M le couple en newtons-mètres.

- Le régime augmente de 3 % et le couple baisse de 1 %. Que devient P ?
- Pour $N = 1\,500$ tr/min et $M = 40$ N·m, calculer P avant et après.

Exercice 16 – Synthèse : dimensionner une citerne

Une citerne ouverte, à base carrée de côté x (en mètres), doit contenir 32 m^3 . La tôle coûte 45 € le m^2 .

- Exprimer la hauteur puis la surface de tôle en fonction de x .
- Déterminer les dimensions qui minimisent la surface.
- Calculer le coût correspondant.
- Un fabricant propose une citerne de 4 m de côté. Chiffrer le surcoût.