

Plaquette 1 - Produit, quotient et approximation locale

Dérivées et approximation affine — Première STI2D

Exercices

Méthode

On complète la panoplie de dérivation (produit, quotient, cos, sin), on écrit la **notation différentielle** $\frac{dy}{dx}$, et on utilise l'**approximation affine** $f(a + h) \approx f(a) + hf'(a)$ pour estimer un petit écart — le calcul d'incertitude de la filière.

Exercice 1 - Dérivée d'un produit

Calculer la dérivée de $f(x) = (3x + 1)(x^2 - 2)$, sous forme développée et réduite.

Exercice 2 - Dérivée d'un quotient

Calculer la dérivée de $f(x) = \frac{2x + 5}{x - 3}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, puis en déduire le sens de variation.

Exercice 3 - Dérivées trigonométriques

Calculer la dérivée de :

- a) $f(x) = 3 \cos x - 2 \sin x$
- b) $g(x) = x \sin x$
- c) $h(x) = \frac{\cos x}{x}$ sur $]0; +\infty[$

Exercice 4 - Dérivée avec une racine carrée

Calculer la dérivée de $f(x) = x\sqrt{x}$ sur $]0; +\infty[$, de deux façons.

Exercice 5 - Notation différentielle

Le volume d'une sphère est $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

- a) Calculer $\frac{dV}{dr}$.
- b) Exprimer dV en fonction de dr pour $r = 5$ cm.

Exercice 6 - Approximation affine

Soit $f(x) = \sqrt{x}$. À l'aide de l'approximation affine au voisinage de $a = 100$, estimer $\sqrt{101}$ puis comparer à la valeur de la calculatrice (au millième).

Exercice 7 - Approximation d'un carré

Soit $f(x) = x^2$.

- a) Écrire l'approximation affine de f au voisinage de $a = 7$.

b) Estimer $7,02^2$ puis comparer à la valeur exacte.

Exercice 8 - Variation relative

La résistance d'un fil est $R = \frac{k}{d^2}$ où d est son diamètre (k constante).

- a) Calculer $\frac{dR}{dd}$.
- b) Si le diamètre augmente de 1 %, de combien varie la résistance (approximativement) ?

Exercice 9 - Problème : dilatation d'une tige

Une tige de longueur $L = 2$ m a une section circulaire de rayon r . Son volume est $V = \pi r^2 L$. On prend $r = 0,01$ m.

- a) Calculer V (valeur exacte et arrondie au cm^3).
- b) Le rayon augmente de 0,000 1 m. Estimer la variation de volume par approximation affine.

Exercice 10 - Problème : incertitude sur une puissance

La puissance dissipée dans une résistance est $P = RI^2$, avec $R = 20 \Omega$.

- a) Calculer P pour $I = 3$ A.
- b) Le courant est mesuré à 3 A avec une incertitude de 0,05 A. Estimer l'incertitude sur P par approximation affine.

Exercice 11 - Produit avec un cosinus

Soit $f(x) = x \cos x$.

- a) Calculer $f'(x)$.
- b) Calculer $f'(0)$ et $f'(\pi)$, puis donner la tangente à l'origine.

Exercice 12 - Maximum d'un quotient

Soit $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 4}$ sur $\mathbb{R}$.

- a) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
- b) En déduire le maximum de f .

Exercice 13 - Problème : une résistance qui chauffe

Un dipôle de résistance R (en ohms) est alimenté sous $U = 12$ V : l'intensité vaut $I = \frac{12}{R}$ ampères. En chauffant, R passe de 4Ω à $4,1 \Omega$.

- a) Calculer $\frac{dI}{dR}$ en $R = 4$.
- b) Estimer la nouvelle intensité, puis comparer à la valeur exacte.

Exercice 14 - Repérer une erreur sur un quotient

Pour $f(x) = \frac{3x}{x+1}$ sur $] -1 ; +\infty[$, un élève écrit : « $f'(x) = \frac{(3x)'}{(x+1)'} = \frac{3}{1} = 3$ ». Corriger, puis contrôler numériquement en $x = 1$.

Exercice 15 - Synthèse : dérivée et tangente

Soit $f(x) = \frac{x}{x+2}$ sur $] -2 ; +\infty[$.

- Calculer $f'(x)$.
- Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 2.
- Estimer $f(2,1)$ par approximation affine, puis comparer à la valeur exacte (au millième).