

Plaquette 3 - Tangente et approximation affine

Dérivées et approximation affine — Première STI2D

Exercices

Méthode

Au voisinage d'un point, une courbe ressemble à sa **tangente**. C'est toute l'idée de l'approximation affine : remplacer un calcul compliqué (une racine, un cube, un sinus) par une multiplication et une addition — avec une erreur d'autant plus faible qu'on reste près du point.

Exercice 1 - Une première tangente

Soit $f(x) = x^2$. Déterminer l'équation de la tangente à sa courbe au point d'abscisse 3.

Exercice 2 - Approcher un carré

À l'aide de la tangente précédente, donner une valeur approchée de $3,02^2$, puis comparer à la valeur exacte.

Exercice 3 - Approcher un cube

Donner une valeur approchée de $2,01^3$ par approximation affine, puis comparer.

Exercice 4 - Approcher une racine

Donner une valeur approchée de $\sqrt{100,6}$.

Exercice 5 - Une autre racine

Donner une valeur approchée de $\sqrt{9,1}$, puis l'erreur commise.

Exercice 6 - Approcher un inverse

Donner une valeur approchée de $\frac{1}{5,1}$.

Exercice 7 - Un pas négatif

Donner une valeur approchée de $9,98^2$.

Exercice 8 - Approximations trigonométriques

Donner des valeurs approchées de $\sin(0,05)$ et $\cos(0,05)$, l'angle étant en radians.

Exercice 9 - L'erreur grandit avec h

Pour $f(x) = x^2$ au point $a = 3$, comparer l'erreur d'approximation pour $h = 0,1$ puis $h = 0,5$.

Exercice 10 - Aire d'un disque

Un disque a un rayon de 10 cm. Estimer l'augmentation d'aire quand le rayon augmente de 1 mm.

Exercice 11 - Volume d'un cube

Une pièce cubique a une arête de 5 cm. Estimer la variation de volume si l'arête augmente de 0,02 cm.

Exercice 12 - Tangente à une fonction quotient

Soit $f(x) = \frac{1}{x}$. Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 2, puis approcher $\frac{1}{2,05}$.

Exercice 13 - Une approximation abusive

Un élève écrit $\sqrt{600} \approx \sqrt{100} + \frac{500}{2 \times 10} = 35$.

Expliquer pourquoi c'est faux, puis proposer un calcul correct.

Exercice 14 - Dilatation d'une tige

La longueur d'une tige vaut $L(\theta) = 2\,000(1 + 1,2 \times 10^{-5}\theta)$ millimètres, où θ est la température en degrés Celsius.

- Calculer $L'(\theta)$.
- Estimer l'allongement pour une hausse de 60 °C.

Exercice 15 - Prévoir avec la tangente

Le rendement d'un moteur suit $r(x) = -0,002x^2 + 0,24x + 20$ (en pourcentage), où x est le régime en centaines de tours par minute, pour x entre 10 et 80.

- Calculer $r(50)$ et $r'(50)$.
- Estimer $r(52)$ et comparer à la valeur exacte.

Exercice 16 - Synthèse : une cuve cylindrique

Une cuve cylindrique a un rayon $r = 80$ cm et une hauteur $h = 150$ cm. Son volume vaut $V = \pi r^2 h$.

- Calculer le volume en litres (1 L = 1 000 cm³).
- La hauteur étant fixée, calculer $\frac{dV}{dr}$ en $r = 80$.
- Estimer la variation de volume si le rayon augmente de 5 mm.
- Comparer à la valeur exacte et donner l'erreur relative.