

MATHÉMATIQUES

Dérivées et approximation affine

Première STI2D

Nombre dérivé • Notation $\frac{dy}{dx}$ • Approximation affine • Dérivée d'un produit
Dérivée d'un quotient • x^n , $\frac{1}{x}$ • cos, sin • $f(ax + b)$ • Signal sinusoïdal

Repères du programme

Ce cours suit le **programme de l'enseignement de spécialité physique-chimie et mathématiques, classe de première STI2D** (BO spécial n°8 du 25 juillet 2019), partie mathématiques, « Dérivation ». Il complète la dérivation de l'enseignement commun (polynômes de degré au plus 3) et couvre :

- point de vue local : notations $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{x_0}$, $\frac{dy}{dx}(x_0)$, $f'(x_0)$; approximation affine $\Delta y \approx f'(x_0)\Delta x$;
- dérivées de $x \mapsto x^n$ (n entier naturel non nul), $x \mapsto \frac{1}{x}$, cos et sin ;
- dérivée d'une somme, d'un produit, de l'inverse, d'un quotient, de $x \mapsto f(ax + b)$;
- dérivée de $t \mapsto A \cos(\omega t + \varphi)$ et $t \mapsto A \sin(\omega t + \varphi)$.

Objectif : utiliser les notations différentielles et l'approximation affine, et dériver produits, quotients, puissances, fonctions trigonométriques et signaux sinusoïdaux.

Table des matières

1	Notations et approximation affine	3
2	Dérivées usuelles	3
3	Opérations sur les dérivées	4
4	Fonctions composées et signaux	4
5	Application aux variations	5
6	Erreurs classiques	5
7	Fiche de synthèse	5
8	Exercices d'application	5
9	Corrigés des exercices	6

1. Notations et approximation affine

Notations

Pour une grandeur $y = f(x)$, le nombre dérivé en x_0 est la limite du taux de variation $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ quand Δx tend vers 0. Les physiciens le notent

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx}(x_0)$$

où dx et dy représentent des variations « infiniment petites » de x et de y .

Approximation affine

Pour Δx proche de 0 :

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \Delta x \quad \text{soit} \quad \Delta y \approx f'(x_0) \Delta x.$$

Géométriquement, on remplace la courbe par sa tangente au voisinage de x_0 .

Dilatation d'un cube

Un cube d'arête $x = 5$ cm a pour volume $V = x^3$. Si l'arête augmente de $\Delta x = 0,02$ cm : $\Delta V \approx 3x^2 \Delta x = 3 \times 25 \times 0,02 = 1,5$ cm³. La valeur exacte est $5,02^3 - 125 \approx 1,506$ cm³.

2. Dérivées usuelles

Fonctions de référence

$f(x)$	$f'(x)$	Ensemble
k (constante)	0	$\mathbb{R}$
x^n ($n \geq 1$ entier)	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$] -\infty ; 0[$ ou $]0 ; +\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$

3. Opérations sur les dérivées

Somme, produit, quotient

Pour u et v dérivables (et v ne s'annulant pas pour l'inverse et le quotient) :

$u + v$	$u' + v'$
ku	ku'
uv	$u'v + uv'$
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$

- $f(x) = (2x+1)(x^2-3) : u = 2x+1, v = x^2-3, f'(x) = 2(x^2-3) + (2x+1) \times 2x = 6x^2 + 2x - 6.$
- $g(x) = \frac{3x-1}{x+2}$ sur $] -2; +\infty[: g'(x) = \frac{3(x+2) - (3x-1) \times 1}{(x+2)^2} = \frac{7}{(x+2)^2}.$
- $h(x) = x \sin x : h'(x) = \sin x + x \cos x.$

4. Fonctions composées et signaux

Dérivée de $x \mapsto f(ax+b)$

$$(f(ax+b))' = a f'(ax+b)$$

$$((2x+1)^3)' = 2 \times 3(2x+1)^2 = 6(2x+1)^2 ; (\cos(3x))' = -3 \sin(3x).$$

Signaux sinusoïdaux

$$(A \cos(\omega t + \varphi))' = -A\omega \sin(\omega t + \varphi) \quad (A \sin(\omega t + \varphi))' = A\omega \cos(\omega t + \varphi)$$

Un oscillateur

Une masse oscille avec la position $x(t) = 0,05 \cos(10t)$ (en mètres, t en secondes). Sa vitesse est $v(t) = x'(t) = -0,5 \sin(10t)$: la vitesse maximale vaut 0,5 m/s, atteinte quand la masse passe par la position d'équilibre ($\cos(10t) = 0$).

5. Application aux variations

Une optimisation

$f(x) = x + \frac{4}{x}$ sur $]0; +\infty[$: $f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x^2}$. Sur $]0; +\infty[$, $f'(x)$ a le signe de $x-2$: f décroît sur $]0; 2]$, croît sur $[2; +\infty[$, et son minimum est $f(2) = 4$.

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$		↘ 4 ↗	

6. Erreurs classiques

À éviter

- Écrire $(uv)' = u'v'$: la dérivée d'un produit n'est pas le produit des dérivées.
- Inverser l'ordre au numérateur du quotient : c'est $u'v - uv'$.
- Oublier le facteur a (ou ω) en dérivant $f(ax+b)$ ou un signal sinusoïdal.
- Se tromper de signe : $(\cos)' = -\sin$, mais $(\sin)' = \cos$.

7. Fiche de synthèse

Approximation	$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$; $\Delta y \approx \frac{dy}{dx}\Delta x$
Usuelles	$(x^n)' = nx^{n-1}$; $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$; $(\cos)' = -\sin$; $(\sin)' = \cos$
Produit, quotient	$(uv)' = u'v + uv'$; $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
Composée affine	$(f(ax+b))' = af'(ax+b)$
Signal	$(A \cos(\omega t + \varphi))' = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$

8. Exercices d'application

Exercice 1 – Dérivées usuelles

Dériver $f(x) = x^5 - \frac{2}{x}$ et $g(x) = 4 \sin x - \cos x$.

Exercice 2 – Produit et quotient

Dériver $h(x) = x^2 \cos x$ et $k(x) = \frac{x+1}{x-1}$ sur $]1; +\infty[$.

Exercice 3 – Composées

Dériver $m(x) = (1 - 2x)^4$ et $u(t) = 5 \sin \left(200t + \frac{\pi}{4} \right)$.

Exercice 4 – Approximation affine

À l'aide de l'approximation affine de $f(x) = \frac{1}{x}$ en $x_0 = 2$, donner une valeur approchée de $\frac{1}{2,1}$.

9. Corrigés des exercices**Corrigé de l'exercice 1**

Corrigé. $f'(x) = 5x^4 + \frac{2}{x^2}$; $g'(x) = 4 \cos x + \sin x$.

Corrigé de l'exercice 2

Corrigé. $h'(x) = 2x \cos x - x^2 \sin x$. $k'(x) = \frac{1 \times (x - 1) - (x + 1) \times 1}{(x - 1)^2} = \frac{-2}{(x - 1)^2}$.

Corrigé de l'exercice 3

Corrigé. $m'(x) = -2 \times 4(1 - 2x)^3 = -8(1 - 2x)^3$; $u'(t) = 5 \times 200 \cos \left(200t + \frac{\pi}{4} \right) = 1\,000 \cos \left(200t + \frac{\pi}{4} \right)$.

Corrigé de l'exercice 4

Corrigé. $f(2) = 0,5$, $f'(2) = -\frac{1}{4}$: $f(2,1) \approx 0,5 - 0,25 \times 0,1 = 0,475$ (valeur exacte $\approx 0,476\,2$).