

## Plaquette 3 – Factoriser et résoudre sans discriminant

### Fonctions et polynômes du second degré — Première STI2D

Corrections détaillées

#### Boîte à outils

##### Les voies de factorisation.

| Forme repérée                  | Outil            |
|--------------------------------|------------------|
| tous les termes ont un facteur | facteur commun   |
| $a^2 - b^2$                    | $(a - b)(a + b)$ |
| $a^2 \pm 2ab + b^2$            | $(a \pm b)^2$    |

##### Équation produit.

$$A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0$$

**À partir d'une racine.** On teste des valeurs simples (0,  $\pm 1$ ,  $\pm 2$ ...). Si  $r$  est racine de  $x^2 + px + q$ , alors  $x^2 + px + q = (x - r)(x - s)$ , et le terme constant donne  $s : q = r \times s$ . On peut aussi trouver l'autre racine par **symétrie** par rapport à l'axe.

##### Carré égal à un nombre.

| Équation $X^2 = k$ | Solutions                         |
|--------------------|-----------------------------------|
| $k > 0$            | $X = \sqrt{k}$ ou $X = -\sqrt{k}$ |
| $k = 0$            | $X = 0$                           |
| $k < 0$            | aucune                            |

**Combien de racines ?** Si le sommet et l'ouverture sont de part et d'autre de l'axe des abscisses ( $a$  et l'ordonnée du sommet de signes contraires), il y a deux racines ; s'ils sont du même côté, aucune.

⚠ Une factorisation se contrôle **toujours** en redéveloppant.

#### Correction de l'exercice 1 - Facteur commun

Aucun des trois trinômes n'a de terme constant :  $x$  est un facteur commun, et l'on conclut avec la règle du produit nul.

a)  $f(x) = 3x(x - 4) : 3x = 0$  ou  $x - 4 = 0$ , d'où  $x = 0$  et  $x = 4$  (**contrôle** :  $f(4) = 48 - 48 = 0$ ).

b)  $g(x) = -5x(x - 4) : \text{mêmes racines, } 0 \text{ et } 4 ; \text{ seul le sens de la parabole change.}$

c)  $h(x) = x(2x + 7) : x = 0$  ou  $2x + 7 = 0$ , soit  $x = -3,5$ .

$$A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \text{ ou } B = 0$$

Sans terme constant, 0 est toujours racine. L'axe de symétrie de a) passe par le milieu des racines,  $x = 2$ .

**Réponse.** a)  $3x(x - 4)$ , racines 0 et 4 · b)  $-5x(x - 4)$ , mêmes racines · c)  $x(2x + 7)$ , racines 0 et  $-3,5$ .

## Correction de l'exercice 2 - Identités remarquables

On reconnaît des identités remarquables.

a)  $x^2 - 49 = x^2 - 7^2 = (x - 7)(x + 7)$  : racines 7 et  $-7$ .

b)  $4x^2 - 25 = (2x)^2 - 5^2 = (2x - 5)(2x + 5)$  : racines 2,5 et  $-2,5$  (**contrôle** :  $4 \times 6,25 - 25 = 0$ ).

c)  $x^2 - 10x + 25$  : les carrés sont  $x^2$  et  $5^2$ , et le double produit  $2 \times x \times 5 = 10x$  correspond. Donc

$$x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$$

et la seule racine est 5, racine double : la parabole touche l'axe des abscisses en son sommet sans le traverser. Donner 5 et  $-5$  serait une erreur : ce n'est pas  $x^2 - 25$ .

**Réponse.** a)  $(x - 7)(x + 7)$ , racines  $\pm 7$  · b)  $(2x - 5)(2x + 5)$ , racines  $\pm 2,5$  · c)  $(x - 5)^2$ , racine double 5.

## Correction de l'exercice 3 - Une racine évidente

On teste des valeurs simples pour trouver une racine évidente, puis on factorise.

a)  $2x^2 - 12x + 10$  : en  $x = 1$ ,  $2 - 12 + 10 = 0$ , donc 1 est racine. L'axe s'obtient avec  $f(x) = 10$  :  $2x(x - 6) = 0$ , d'où l'axe  $x = 3$ . L'autre racine est le symétrique de 1, soit 5 :

$$2x^2 - 12x + 10 = 2(x - 1)(x - 5)$$

b)  $x^2 + 6x + 5$  : en  $x = -1$ ,  $1 - 6 + 5 = 0$ . Avec  $f(x) = 5$ ,  $x(x + 6) = 0$  donne l'axe  $x = -3$  ; l'autre racine est  $-5$ , et  $x^2 + 6x + 5 = (x + 1)(x + 5)$ .

**Contrôle** :  $2(x^2 - 6x + 5) = 2x^2 - 12x + 10$ , et  $(x + 1)(x + 5) = x^2 + 6x + 5$ .

**Réponse.** a)  $2(x - 1)(x - 5)$  :  $x = 1$  et  $x = 5$  · b)  $(x + 1)(x + 5)$  :  $x = -1$  et  $x = -5$ .

## Correction de l'exercice 4 - Un coefficient négatif

On cherche une racine évidente : en  $x = 2$ ,  $-4 + 16 - 12 = 0$ , donc 2 est racine. Pour trouver l'autre, on cherche l'axe de symétrie en résolvant  $f(x) = -12$  :

$$-x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow -x(x - 8) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 8$$

L'axe est la droite  $x = 4$  ; le symétrique de 2 est 6, qui est donc aussi racine (**contrôle** :  $-36 + 48 - 12 = 0$ ). D'où

$$-x^2 + 8x - 12 = -(x - 2)(x - 6)$$

et les solutions sont  $x = 2$  et  $x = 6$ . **Contrôle** :  $-(x^2 - 8x + 12) = -x^2 + 8x - 12$ .

**Réponse.**  $x = 2$  et  $x = 6$ .

## Correction de l'exercice 5 - Sans racine réelle

On cherche le minimum de  $f(x) = x^2 - 4x + 9$ . L'axe s'obtient en résolvant  $f(x) = 9$  :  $x^2 - 4x = 0$ , soit  $x(x - 4) = 0$ , d'où  $x = 0$  ou  $x = 4$ , et l'axe  $x = 2$ . Le sommet vaut

$$f(2) = 4 - 8 + 9 = 5$$

Comme  $a = 1 > 0$ , c'est un minimum :  $f(x) \geq 5 > 0$  pour tout réel  $x$ . Le trinôme ne s'annule jamais, l'équation n'a **aucune solution**.

Graphiquement, la parabole reste au-dessus de l'axe des abscisses. **Contrôle** :  $f(0) = f(4) = 9$ . En revanche,  $x^2 - 4x - 9$  aurait pour minimum  $-13 < 0$  : il aurait deux racines.

**Réponse.**  $x^2 - 4x + 9 = (x - 2)^2 + 5 \geq 5 > 0$  : aucune solution.

### Correction de l'exercice 6 - Factoriser à partir d'une racine

Quand on connaît une racine  $r$  d'un trinôme  $x^2 + px + q$ , on peut écrire  $x^2 + px + q = (x - r)(x - s)$  ; en développant, le terme constant vaut  $r \times s$ , ce qui donne  $s$ .

a)  $4^2 - 9 \times 4 + 20 = 0$  : 4 est racine. Le terme constant vaut  $20 = 4 \times 5$ , donc  $x^2 - 9x + 20 = (x - 4)(x - 5)$ .

b)  $3^2 + 3 - 12 = 0$  : 3 est racine. Comme  $-12 = 3 \times (-4)$ ,  $x^2 + x - 12 = (x - 3)(x + 4)$ .

c)  $(-5)^2 + 10 - 35 = 0$  : -5 est racine. Comme  $-35 = (-5) \times 7$ ,

$$x^2 - 2x - 35 = (x + 5)(x - 7)$$

On contrôle toujours en développant :  $(x + 5)(x - 7) = x^2 - 2x - 35$ .

**Réponse.** a)  $(x - 4)(x - 5)$  · b)  $(x - 3)(x + 4)$  · c)  $(x + 5)(x - 7)$ .

### Correction de l'exercice 7 - Une équation à transformer

a) Diviser par  $x$  ferait perdre la solution  $x = 0$ . On ramène tout à gauche et on factorise :  $x^2 - 5x = x(x - 5) = 0$ , d'où  $x = 0$  et  $x = 5$ .

b) Un nombre dont le carré vaut 16 vaut 4 ou -4 :  $x - 3 = 4$  ou  $x - 3 = -4$ , d'où  $x = 7$  et  $x = -1$ . Ne donner que 7 serait une erreur.

c) On ramène tout à gauche :  $2x^2 - 10x + 8 = 0$ , soit  $x^2 - 5x + 4 = 0$ . La valeur 1 est racine évidente ( $1 - 5 + 4 = 0$ ), et  $4 = 1 \times 4$ , donc

$$x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 4)$$

Les solutions sont  $x = 1$  et  $x = 4$ . **Contrôle** :  $2 \times 16 + 8 = 40 = 10 \times 4$ .

**Réponse.** a) 0 et 5 · b) 7 et -1 · c) 1 et 4.

### Correction de l'exercice 8 - Combien de racines ?

Une parabole coupe l'axe des abscisses deux fois si son sommet et son « ouverture » sont de part et d'autre de l'axe, jamais s'ils sont du même côté.

a)  $a = 3 > 0$  et le sommet  $(2 ; -12)$  est sous l'axe : la parabole, tournée vers le haut, traverse l'axe **deux fois**.

b)  $a = 2 > 0$  et le sommet  $(-1 ; 5)$  est au-dessus : le minimum est positif, **aucune** racine.

c)  $a = -4 < 0$  et le sommet  $(3 ; 16)$  est au-dessus : la parabole, tournée vers le bas, coupe l'axe **deux fois**.

d)  $a = -1 < 0$  et le sommet  $(5 ; -1)$  est sous l'axe : le maximum est négatif, **aucune** racine.

$$a \text{ et } y_s \text{ de signes contraires} \Leftrightarrow \text{deux racines}$$

Si le sommet est sur l'axe ( $y_s = 0$ ), il y a une seule racine, double.

**Réponse.** a) et c) deux racines · b) et d) aucune.

### Correction de l'exercice 9 - Repérer une erreur

En divisant par  $x$ , l'élève a supposé  $x \neq 0$  sans le vérifier, et il a perdu la solution  $x = 0$ . On ramène tout à gauche, puis on factorise :

$$x^2 = 9x \Leftrightarrow x^2 - 9x = 0 \Leftrightarrow x(x - 9) = 0$$

Les solutions sont  $x = 0$  **et**  $x = 9$  ( $0 = 0$  et  $81 = 81$ ).

On ne divise jamais par une expression qui peut être nulle. De même, pour  $(x - 2)(x + 1) = (x - 2)(3x - 4)$ , on factorise par  $(x - 2)$  au lieu de simplifier :  $(x - 2)(5 - 2x) = 0$ , d'où  $x = 2$  et  $x = 2,5$ .

**Réponse.** Il faut factoriser :  $x(x - 9) = 0$ , d'où  $x = 0$  et  $x = 9$ .

### Correction de l'exercice 10 - Une trajectoire à annuler

a) On met  $-0,2x$  en facteur :

$$h(x) = -0,2x^2 + 2x = -0,2x(x - 10)$$

b)  $h(x) = 0$  pour  $x = 0$  (le départ) et  $x = 10$  (la chute) : la portée vaut 10 m.

c) L'axe de symétrie passe par le milieu des racines, en  $x = 5$ . Comme  $a < 0$ , le sommet est un maximum :  $h(5) = -5 + 10 = 5$  m.

**Contrôle** de la symétrie :  $h(2) = h(8) = 3,2$  m. Le projectile monte à 5 m, à mi-chemin de son vol.

**Réponse.** a)  $-0,2x(x - 10)$  · b) 10 m · c) 5 m en  $x = 5$ .

### Correction de l'exercice 11 - Deux équations à comparer

a) Un carré n'est nul que si son contenu l'est :  $x - 4 = 0$ , donc  $x = 4$ , solution double. La parabole touche l'axe sans le traverser.

b) Un nombre dont le carré vaut 9 vaut 3 ou  $-3$  :  $x - 4 = 3$  ou  $x - 4 = -3$ , d'où  $x = 7$  et  $x = 1$ .

c) Un carré est toujours positif ou nul, il ne peut pas valoir  $-1$  : **aucune solution**.

$$X^2 = k: \text{deux solutions si } k > 0, \text{ une si } k = 0, \text{ aucune si } k < 0$$

**Contrôle** de b) :  $(7 - 4)^2 = (1 - 4)^2 = 9$ .

**Réponse.** a)  $x = 4$  (double) · b)  $x = 1$  et  $x = 7$  · c) aucune solution.

### Correction de l'exercice 12 - Une factorisation en deux temps

Les deux produits ont le facteur commun  $(x - 3)$  ; on le met en facteur, en plaçant le reste entre crochets. Le signe moins porte sur toute la seconde parenthèse :

$$f(x) = (x - 3)[(2x + 1) - (x + 5)] = (x - 3)(x - 4)$$

Les racines sont  $x = 3$  et  $x = 4$ . **Contrôle** en  $x = 4$  :  $1 \times 9 - 1 \times 9 = 0$ .

En développant,  $f(x) = x^2 - 7x + 12$ . Oublier de distribuer le moins donnerait  $3x + 6$  dans le crochet, et la fausse racine  $-2$  :  $f(-2) = 15 + 15 = 30 \neq 0$ .

**Réponse.**  $f(x) = (x - 3)(x - 4)$ , racines 3 et 4.

### Correction de l'exercice 13 - Reconstituer un trinôme

a) Un trinôme de coefficient dominant  $a$  et de racines  $x_1$  et  $x_2$  s'écrit  $a(x - x_1)(x - x_2)$  :

$$f(x) = 2(x + 1)(x - 6) = 2(x^2 - 5x - 6) = 2x^2 - 10x - 12$$

**Contrôle** :  $f(-1) = 2 + 10 - 12 = 0$  et  $f(6) = 72 - 60 - 12 = 0$ .

b) L'axe de symétrie passe par le milieu des racines,  $x = \frac{-1+6}{2} = 2,5$ , et

$f(2,5) = 12,5 - 25 - 12 = -24,5$ . Le sommet est  $S(2,5; -24,5)$ , un minimum car  $a > 0$ .

**Réponse.** a)  $2(x + 1)(x - 6) = 2x^2 - 10x - 12$  · b)  $S(2,5; -24,5)$ .

### Correction de l'exercice 14 - Une section de câble

Si la largeur vaut  $x$  mm, la longueur vaut  $x + 3$  mm, et l'aire doit valoir  $180 \text{ mm}^2$  :

$$x(x + 3) = 180 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 180 = 0$$

On cherche une racine en testant des valeurs entières :  $12 \times 15 = 180$ , donc  $x = 12$  convient. Le terme constant vaut  $-180 = 12 \times (-15)$ , d'où  $x^2 + 3x - 180 = (x - 12)(x + 15)$ , et l'autre solution est  $-15$ , impossible pour une largeur.

La section mesure **12 mm sur 15 mm. Contrôle** :  $12 \times 15 = 180 \text{ mm}^2$ .

**Réponse.** Une largeur de 12 mm et une longueur de 15 mm.

### Correction de l'exercice 15 - Choisir la bonne écriture

a) On résout  $f(x) = 15$  :  $3x^2 - 18x = 0$ , soit  $3x(x - 6) = 0$ , d'où l'axe  $x = 3$ . Le sommet vaut  $f(3) = 27 - 54 + 15 = -12$  :  $S(3; -12)$ , un minimum car  $a = 3 > 0$ .

b) 1 est racine évidente ( $3 - 18 + 15 = 0$ ) ; son symétrique par rapport à 3, soit 5, est l'autre racine :

$$f(x) = 3(x - 1)(x - 5)$$

c) Chaque écriture répond à une question : la forme **développée** donne directement  $f(0) = 15$  ; la forme **factorisée** donne les racines 1 et 5, et le signe ; le **sommet** donne l'extremum,  $-12$  en  $x = 3$ . **Contrôle** :  $3 \times (-1) \times (-5) = 15$ .

**Réponse.** a) axe  $x = 3$ ,  $S(3; -12)$  · b)  $3(x - 1)(x - 5)$  · c) développée pour  $f(0)$ , factorisée pour les racines, sommet pour l'extremum.

### Correction de l'exercice 16 - Synthèse : un dimensionnement

a) L'aire de la base vaut  $x(x - 2) \text{ dm}^2$  et la hauteur 1 dm, donc  $V(x) = x(x - 2) = x^2 - 2x$ , avec  $x > 2$  pour que la seconde dimension soit positive.

b) On résout  $x^2 - 2x = 63$ , soit  $x^2 - 2x - 63 = 0$ . En testant des valeurs entières,  $9 \times 7 = 63$  :  $x = 9$  convient. Le terme constant vaut  $-63 = 9 \times (-7)$ , donc

$$x^2 - 2x - 63 = (x - 9)(x + 7)$$

L'autre solution,  $-7$ , est exclue. Le caisson mesure **9 dm sur 7 dm sur 1 dm**, soit  $63 \text{ dm}^3$ , c'est-à-dire 63 litres.

**Réponse.** a)  $V(x) = x^2 - 2x$  · b)  $x = 9 \text{ dm}$ , soit  $9 \times 7 \times 1 \text{ dm}$ .