

Plaquette 5 – Optimisation technique

Fonctions et polynômes du second degré — Première STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

La méthode d'optimisation.

Étape	Ce qu'on fait
1	nommer l'inconnue et écrire la contrainte
2	exprimer la grandeur à optimiser en fonction de x
3	trouver l'axe : milieu des racines, ou milieu des solutions de $f(x) = c$
4	calculer l'image de l'abscisse trouvée
5	conclure dans le contexte , avec l'unité

Nature de l'optimum.

Signe de a	Optimum
$a < 0$	un maximum
$a > 0$	un minimum

Racines et milieu. Quand la fonction est factorisée, l'abscisse du sommet est le **milieu des racines** :

$$x_S = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Domaine de validité. Une longueur, une aire, une puissance sont **positives** : il faut restreindre x et vérifier que l'optimum est dans le domaine.

Sur un intervalle fermé. Si le sommet est hors de l'intervalle, l'optimum est atteint à une **borne**.

⚠ Toujours revenir aux dimensions physiques : un x optimal donne une longueur, une intensité, un régime — pas seulement un nombre.

Correction de l'exercice 1 - Un enclos contre un mur

Le grillage forme deux largeurs x et une longueur, le mur fermant le quatrième côté : la longueur vaut $120 - 2x$.

a) L'aire vaut $A(x) = x(120 - 2x) = -2x^2 + 120x$, pour $0 < x < 60$.

b) L'aire s'annule en $x = 0$ et $x = 60$; l'axe passe par le milieu, $x = 30$. Comme $a = -2 < 0$, c'est un maximum :

$$A(30) = 30 \times 60 = 1\,800 \text{ m}^2$$

L'enclos optimal mesure 30 m sur 60 m. **Contrôle** : $A(20) = A(40) = 1\,600 \text{ m}^2$. Ce n'est pas un carré : le mur fournit gratuitement un côté.

Réponse. a) $A(x) = -2x^2 + 120x$ · b) 1800 m^2 , pour 30 m sur 60 m.

Correction de l'exercice 2 - Une puissance maximale

a) On cherche l'axe en résolvant $P(x) = -250 : -0,5x^2 + 30x = 0$, soit $x(-0,5x + 30) = 0$, d'où $x = 0$ ou $x = 60$. L'axe est $x = 30$, et

$$P(30) = -450 + 900 - 250 = 200 \text{ W}$$

C'est un maximum ($a < 0$). **Contrôle** : $P(20) = P(40) = 150 \text{ W}$.

b) La valeur 10 est racine ($-50 + 300 - 250 = 0$) ; son symétrique par rapport à 30, soit 50, est l'autre racine. D'où $P(x) = -0,5(x - 10)(x - 50)$: la puissance est positive entre les racines, pour $x \in]10; 50[$.

Réponse. a) 200 W en $x = 30$ · b) $x \in]10; 50[$.

Correction de l'exercice 3 - Un coût minimal

a) On résout $C(x) = 450 : 0,5x^2 - 20x = 0$, soit $x(0,5x - 20) = 0$, d'où $x = 0$ ou $x = 40$. L'axe est $x = 20$, et

$$C(20) = 200 - 400 + 450 = 250 \text{ €}$$

C'est un minimum ($a > 0$). **Contrôle** : $C(10) = C(30) = 300 \text{ €}$.

b) Le coût vaut au moins 250 € pour toute production : il ne descend **jamais** sous 200 €. En revanche, il passe sous 300 € entre $x = 10$ et $x = 30$, les deux valeurs symétriques où il vaut exactement 300 €.

Réponse. a) 250 € pour $x = 20$ · b) non : le coût reste supérieur ou égal à 250 €.

Correction de l'exercice 4 - Une section de canal

a) Le périmètre mouillé vaut $2h + \ell = 12$, donc $\ell = 12 - 2h$, et la section

$$S(h) = h(12 - 2h) = -2h^2 + 12h \quad (0 < h < 6)$$

b) La section s'annule en $h = 0$ et $h = 6$; l'axe passe par le milieu, $h = 3$. Comme $a < 0$, c'est un maximum : $S(3) = 3 \times 6 = 18 \text{ m}^2$, pour une largeur de 6 m.

La section optimale est deux fois plus large que haute. **Contrôle** : $S(2) = S(4) = 16 \text{ m}^2$, moins que 18.

Réponse. a) $S(h) = -2h^2 + 12h$ · b) 18 m^2 , pour $h = 3 \text{ m}$ et $\ell = 6 \text{ m}$.

Correction de l'exercice 5 - Une trajectoire

a) On factorise : $h(x) = -0,05x(x - 80)$. Le jet part de $x = 0$ et retombe en $x = 80$: la portée vaut 80 m.

b) L'axe passe par le milieu des racines, $x = 40$, et

$$h(40) = -0,05 \times 1\,600 + 160 = 80 \text{ m}$$

C'est la hauteur maximale ($a < 0$).

c) $h(20) = -20 + 80 = 60 \text{ m}$ et $h(60) = -180 + 240 = 60 \text{ m}$: 20 et 60 sont symétriques par rapport à 40. De même, $h(30) = 75 \text{ m}$, donc la hauteur vaut aussi 75 m en $x = 50$.

Réponse. a) 80 m · b) 80 m en $x = 40$ · c) 60 m dans les deux cas.

Correction de l'exercice 6 - Un bénéfice maximal

a) On résout $B(x) = -240 : -0,4x^2 + 32x = 0$, soit $x(-0,4x + 32) = 0$, d'où $x = 0$ ou $x = 80$. L'axe est $x = 40$, et

$$B(40) = -640 + 1\,280 - 240 = 400 \text{ €}$$

C'est le bénéfice maximal ($a < 0$). **Contrôle** : $B(30) = B(50) = 360$ €.

b) Les racines ne sont pas entières : on les encadre par balayage, comme le ferait un solveur. $B(8) = -9,6$ et $B(9) = 15,6$, puis $B(8,3) \approx -1,96$ et $B(8,4) \approx 0,58$: une racine est entre 8,3 et 8,4. Par symétrie par rapport à 40, l'autre est entre 71,6 et 71,7. L'activité est rentable de 9 à 71 unités.

Réponse. a) 400 € pour $x = 40$ · b) rentable entre $\approx 8,38$ et $\approx 71,62$ unités.

Correction de l'exercice 7 - Deux rectangles à comparer

a) Pour un rectangle complet, le demi-périmètre vaut 40 m : l'aire vaut $x(40 - x)$, nulle en 0 et 40. L'axe est $x = 20$, d'où une aire maximale de $20 \times 20 = 400$ m² : un **carré**.

b) Adossé à un mur, le grillage forme deux largeurs et une longueur : $\ell = 80 - 2x$, et l'aire vaut $x(80 - 2x)$, nulle en 0 et 40. L'axe est encore $x = 20$:

$$20 \times (80 - 40) = 20 \times 40 = 800 \text{ m}^2$$

Le mur double l'aire, car il fournit gratuitement un côté. L'optimum est un rectangle deux fois plus long que large, et le côté le long du mur utilise la moitié du grillage.

Réponse. a) 400 m² (carré de 20 m) · b) 800 m² (20 m sur 40 m).

Correction de l'exercice 8 - Un optimum hors intervalle

a) Sans contrainte, le sommet est en $x = 30$ (axe obtenu en résolvant $P(x) = -250$), avec une puissance maximale de 200 W.

b) Le régime est limité à $x \leq 25$: le sommet n'est pas atteignable. À gauche du sommet, avec $a < 0$, la fonction est croissante : sur $]0 ; 25]$, la puissance est maximale à la borne $x = 25$,

$$P(25) = -312,5 + 750 - 250 = 187,5 \text{ W}$$

On perd 12,5 W, soit 6,25 %. **Contrôle** : $P(24) = 182$ W, moins que 187,5. Sur un intervalle, l'optimum peut être une borne.

Réponse. a) 200 W en $x = 30$ · b) 187,5 W en $x = 25$.

Correction de l'exercice 9 - Une distance minimale

a) On cherche l'axe en résolvant $d(t) = 20$: $2t^2 - 8t = 0$, soit $2t(t - 4) = 0$, d'où $t = 0$ ou $t = 4$. L'axe est $t = 2$: comme $a = 2 > 0$, la distance est minimale à $t = 2$ s.

b) $d(2) = 8 - 16 + 20 = 12$ m², donc la distance minimale vaut

$$\sqrt{12} \approx 3,46 \text{ m}$$

Contrôle : $d(0) = d(4) = 20$ m². Comme $d(t) \geq 12 > 0$, les mobiles ne se croisent jamais. La racine carrée étant croissante, minimiser le carré de la distance revient à minimiser la distance.

Réponse. a) $t = 2$ s · b) $\sqrt{12} \approx 3,46$ m.

Correction de l'exercice 10 - Un rendement à régler

a) On résout $r(x) = -45$: $-x^2 + 18x = 0$, soit $-x(x - 18) = 0$, d'où l'axe $x = 9$. Le rendement maximal vaut $r(9) = -81 + 162 - 45 = 36$ %.

b) On ramène tout d'un côté : $-x^2 + 18x - 45 > 27 \Leftrightarrow -x^2 + 18x - 72 > 0$. La valeur 6 annule ce trinôme ($-36 + 108 - 72 = 0$), et son symétrique par rapport à 9, soit 12, aussi :

$$-x^2 + 18x - 72 = -(x - 6)(x - 12)$$

Le coefficient dominant est négatif : l'expression est positive entre les racines. Le rendement dépasse 27 % pour $x \in]6; 12[$ (**contrôle** : $r(6) = r(12) = 27$ et $r(5) = 20$).

Réponse. a) 36 % en $x = 9$ · b) $x \in]6; 12[$.

Correction de l'exercice 11 - Repérer une erreur

L'élève a donné une **racine** : $A(x) = -2x(x - 60)$ s'annule en 0 et en 60. En $x = 60$, l'aire est nulle (le rectangle est aplati) : c'est le contraire d'un maximum.

Le maximum est au sommet, sur l'axe de symétrie, à mi-chemin des racines :

$$x = \frac{0 + 60}{2} = 30 \quad A(30) = -1\,800 + 3\,600 = 1\,800 \text{ m}^2$$

Contrôle : $A(59) = 118 \text{ m}^2$, très loin de 1 800. Une racine annule la fonction, elle ne l'optimise pas ; vérifier la valeur obtenue suffit à repérer l'erreur.

Réponse. 60 est une **racine** ($A = 0$) : le maximum est en $x = 30$, avec 1800 m^2 .

Correction de l'exercice 12 - Un débit optimal

a) On résout $D(x) = -60 : -3x^2 + 36x = 0$, soit $-3x(x - 12) = 0$, d'où l'axe $x = 6$. Le débit maximal vaut

$$D(6) = -108 + 216 - 60 = 48 \text{ L/min}$$

(**contrôle** : $D(4) = D(8) = 36$).

b) La valeur 2 est racine ($-12 + 72 - 60 = 0$) ; son symétrique par rapport à 6, soit 10, aussi. Donc $D(x) = -3(x - 2)(x - 10)$: le débit est positif entre les racines, pour $x \in]2; 10[$, la plage de fonctionnement utile.

Réponse. a) 48 L/min en $x = 6$ · b) $x \in]2; 10[$.

Correction de l'exercice 13 - Deux dimensionnements

a) Le demi-périmètre vaut 30 cm : l'aire vaut $x(30 - x)$, nulle en 0 et 30. L'axe est $x = 15$: l'aire maximale vaut $15 \times 15 = 225 \text{ cm}^2$, pour un carré de 15 cm.

b) Si la longueur vaut le double de la largeur, le périmètre vaut $2(x + 2x) = 6x = 60$, d'où $x = 10 \text{ cm}$ et une longueur de 20 cm :

$$10 \times 20 = 200 \text{ cm}^2$$

La contrainte de forme coûte 25 cm^2 , soit environ 11 % de l'aire. Avec un rapport 3 (largeur 7,5 cm, longueur 22,5 cm), l'aire tomberait à $168,75 \text{ cm}^2$: plus le rectangle est allongé, plus l'aire diminue.

Réponse. a) 225 cm^2 (carré de 15 cm) · b) 200 cm^2 , soit $\approx 11 \%$ de moins.

Correction de l'exercice 14 - Un optimum avec contrainte

a) Sans contrainte, le sommet est en $x = 20$ (axe obtenu en résolvant $C(x) = 450$) et le coût minimal vaut 250 €.

b) La production doit être d'au moins 30 unités : le sommet est hors du domaine. À droite du sommet, avec $a > 0$, la fonction est croissante : sur $[30; +\infty[$, le coût est minimal à la borne $x = 30$,

$$C(30) = 450 - 600 + 450 = 300 \text{ €}$$

La contrainte coûte 50 € de plus que l'optimum libre, soit 20 %. **Contrôle** : $C(35) = 362,5 \text{ €}$, plus cher. Assouplir la contrainte à 25 unités ramènerait le coût à 262,5 €.

Réponse. a) 250 € en $x = 20$ · b) 300 € en $x = 30$.

Correction de l'exercice 15 - Comparer deux réglages

a) Réglage A : $P_A(x) = -x^2 - 75x + 200 = 0$ donne $-x(x + 75) = 0$, axe $x = 10$, et $P_A(10) = -100 + 200 - 75 = 25$. Réglage B : $P_B(x) = -x^2 - 72x + 196 = 0$ donne $x(-x - 72) = 0$, d'où $x = 0$ ou $x = 28$, axe $x = 14$, et

$$P_B(14) = -196 + 196 - 72 = -72$$

b) Le réglage **B** donne le maximum le plus élevé ($26 > 25$, soit 4 % de mieux), à condition que le régime 14 soit accessible. Il a aussi la plage utile la plus large. P_A est positive entre 5 et 15 (racine évidente 5, symétrique 15). Les racines de P_B ne sont pas entières : par balayage, $P_B(6,7) \approx -0,65$ et $P_B(6,8) \approx 0,08$, donc une racine est vers 6,8, et l'autre, symétrique par rapport à 14, vers 21,2. La plage utile de B mesure environ 14,4, contre 10 pour A.

Réponse. a) 25 en $x = 10$ pour A, 26 en $x = 14$ pour B · b) le réglage B.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : une pièce à dimensionner

a) Le demi-périmètre vaut 50 cm : si la largeur vaut x , l'aire vaut

$$A(x) = x(50 - x) = -x^2 + 50x, \text{ pour } 0 < x < 50.$$

b) L'aire s'annule en 0 et 50 ; l'axe passe par le milieu, $x = 25$. L'aire maximale vaut $25 \times 25 = 625 \text{ cm}^2$, pour un carré de 25 cm.

c) On résout $-x^2 + 50x \geq 600$, soit $-x^2 + 50x - 600 \geq 0$. La valeur 20 annule ce trinôme ($-400 + 1\,000 - 600 = 0$) ; son symétrique par rapport à 25, soit 30, aussi :

$$-x^2 + 50x - 600 = -(x - 20)(x - 30)$$

L'expression est positive entre les racines, racines incluses : les largeurs acceptables vont de 20 à 30 **cm**. **Contrôle** : $A(20) = A(30) = 600 \text{ cm}^2$.

Réponse. a) $A(x) = -x^2 + 50x$ · b) 625 cm^2 (carré de 25 cm) · c) $20 \leq x \leq 30$.