

Plaquette 4 – Signe du trinôme et inéquations

Fonctions et polynômes du second degré — Première STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

La règle du signe.

Cas	Signe de f
deux racines $x_1 < x_2$	signe de a hors $[x_1 ; x_2]$, signe contraire entre
une racine double x_0	signe de a partout, nul en x_0
aucune racine	signe de a partout

Repérer le cas sans racine. On cherche le sommet par la méthode de l'axe : si l'extremum est du même côté de l'axe des abscisses que l'ouverture de la parabole, il n'y a aucune racine.

$$a(x - x_1)(x - x_2) \text{ a le signe de } a \text{ hors de } [x_1 ; x_2]$$

Résoudre une inéquation.

Étape	Ce qu'on fait
1	tout ramener d'un côté
2	factoriser (racine évidente, facteur commun, identité)
3	appliquer la règle du signe
4	écrire la solution en intervalles

Comparer deux fonctions. $f(x) \geq g(x)$ revient à étudier le signe de $f - g$.

⚠ On ne divise **jamais** une inéquation par une expression de signe inconnu.

⚠ Une inégalité large ($\leq$) inclut les racines ; une stricte les exclut.

Correction de l'exercice 1 – Signe d'un produit

Un trinôme factorisé $a(x - x_1)(x - x_2)$ a le signe de a à l'**extérieur** des racines et le signe contraire **entre** elles.

a) $a = 1 > 0$, racines 2 et 6 : f est positive sur $]-\infty ; 2[$ et sur $]6 ; +\infty[$, négative sur $]2 ; 6[$.

Contrôle : $f(0) = 12$, $f(4) = -4$, $f(8) = 12$.

b) $a = -3 < 0$, racines -1 et 4 : g est négative à l'extérieur, positive entre :

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 4$$

Contrôle : $g(0) = -3 \times 1 \times (-4) = 12 > 0$ et $g(5) = -18 < 0$. Le signe de a commande tout.

Réponse. a) positif hors $[2 ; 6]$ · b) positif seulement sur $] -1 ; 4[$.

Correction de l'exercice 2 – Sans racine

On raisonne sur le signe d'un carré, toujours positif ou nul.

a) $(x - 2)^2 \geq 0$, donc $f(x) = (x - 2)^2 + 5 \geq 5 > 0$: f est **strictement positive** partout, avec un minimum 5 en $x = 2$.

b) $-2(x+3)^2 \leq 0$, donc $g(x) \leq -1 < 0$: g est **strictement négative** partout, avec un maximum -1 en $x = -3$.

c) $h(x) = 2(x-5)^2 \geq 0$, nul seulement en $x = 5$: racine double.

$$h(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad h(5) = 0$$

Dans les trois cas, le signe est celui de a (1, -2 et 2) : sans racine, ou avec une racine double, un trinôme garde le signe de a .

Réponse. a) toujours positif · b) toujours négatif · c) positif, nul en $x = 5$.

Correction de l'exercice 3 - Une inéquation simple

On factorise d'abord. La valeur 2 est racine évidente ($4 - 14 + 10 = 0$), et $10 = 2 \times 5$, donc

$$x^2 - 7x + 10 = (x-2)(x-5)$$

Le coefficient dominant est positif : le trinôme est négatif **entre** ses racines. L'inégalité étant large, on inclut les racines : l'ensemble des solutions est $[2; 5]$.

Contrôle : en $x = 3$, $9 - 21 + 10 = -2 \leq 0$; en $x = 0$, $10 > 0$; en $x = 6$, $4 > 0$. Avec une inégalité stricte, la solution serait $]2; 5[$.

Réponse. $x \in [2; 5]$.

Correction de l'exercice 4 - Avec un coefficient négatif

La valeur 2 est racine évidente ($-4 + 16 - 12 = 0$). On met -1 en facteur : $-x^2 + 8x - 12 = -(x^2 - 8x + 12)$, et $12 = 2 \times 6$, donc

$$-x^2 + 8x - 12 = -(x-2)(x-6)$$

Le coefficient dominant est négatif : le trinôme est positif **entre** ses racines. L'inégalité est stricte, les racines sont exclues : la solution est $]2; 6[$.

Contrôle : en $x = 4$, $-16 + 32 - 12 = 4 > 0$; en $x = 1$ et $x = 7$, on trouve $-5 < 0$. Garder la règle du cas $a > 0$ serait l'erreur classique.

Réponse. $x \in]2; 6[$.

Correction de l'exercice 5 - Une inéquation à transformer

On ramène tout d'un côté : $x^2 - 4x - 5 > 0$. La valeur -1 est racine évidente ($1 + 4 - 5 = 0$), et $-5 = (-1) \times 5$, donc

$$x^2 - 4x - 5 = (x+1)(x-5)$$

Le coefficient dominant est positif : le trinôme est positif à l'extérieur des racines. L'inégalité est stricte, d'où la solution $] -\infty; -1[\cup]5; +\infty[$.

Contrôle : en $x = 6$, $7 > 0$; en $x = 0$, $-5 < 0$; en $x = -2$, $7 > 0$. Diviser par x serait faux, car on ne connaît pas son signe.

Réponse. $x \in] -\infty; -1[\cup]5; +\infty[$.

Correction de l'exercice 6 - Comparer deux fonctions

Comparer f et g , c'est étudier le signe de leur différence :

$$f(x) - g(x) = x^2 - 3x + 2 - 2x + 4 = x^2 - 5x + 6$$

La valeur 2 est racine ($4 - 10 + 6 = 0$) et $6 = 2 \times 3$, donc $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$. Le coefficient dominant est positif : la différence est positive ou nulle à l'extérieur de $]2; 3[$,

d'où $f(x) \geq g(x)$ sur $] -\infty ; 2] \cup [3 ; +\infty[$.

Contrôle : en $x = 0$, $f = 2 \geq g = -4$; en $x = 2,5$, $f = 0,75 < g = 1$. Les courbes se coupent en $(2 ; 0)$ et $(3 ; 2)$.

Réponse. $x \in] -\infty ; 2] \cup [3 ; +\infty[$.

Correction de l'exercice 7 - Tableau de signes

Le coefficient dominant vaut $-2 < 0$ et les racines sont 3 et 7 : f est négative à l'extérieur des racines et positive entre elles.

x	$-\infty$	3	7	$+\infty$
$f(x)$	-	0 + 0		-

Contrôle : $f(0) = -2 \times (-3) \times (-7) = -42$, $f(5) = -2 \times 2 \times (-2) = 8$ et $f(8) = -2 \times 5 \times 1 = -10$.

$$f(5) = 8$$

est le maximum : l'axe passe par le milieu des racines, $x = 5$, et le sommet $(5 ; 8)$ est un maximum car $a < 0$.

Réponse. Négatif hors $[3 ; 7]$, positif entre, nul en 3 et 7.

Correction de l'exercice 8 - Un domaine technique

a) On met $-0,4x$ en facteur :

$$P(x) = -0,4x^2 + 8x = -0,4x(x - 20)$$

b) Les racines sont 0 et 20 et le coefficient dominant est négatif : P est positive **entre** les racines, pour $x \in]0 ; 20[$. **Contrôle** : $P(10) = 40 > 0$ et $P(25) = -50 < 0$. Le modèle n'a de sens physique que sur cet intervalle.

c) L'axe passe par le milieu des racines, $x = 10$: la puissance est maximale pour 10 A et vaut $P(10) = -40 + 80 = 40$ W. **Contrôle** de la symétrie : $P(5) = P(15) = 30$ W.

Réponse. a) $-0,4x(x - 20)$ · b) $x \in]0 ; 20[$ · c) maximum 40 W pour $x = 10$ A.

Correction de l'exercice 9 - Une tolérance à respecter

a) Un nombre dont le carré est inférieur ou égal à $0,09 = 0,3^2$ est compris entre $-0,3$ et $0,3$:

$$(x - 12)^2 \leq 0,09 \Leftrightarrow -0,3 \leq x - 12 \leq 0,3 \Leftrightarrow 11,7 \leq x \leq 12,3$$

b) La cote nominale vaut 12 mm avec une tolérance de $\pm 0,3$ mm, soit 2,5 % de la cote.

Contrôle : pour $x = 12,2$, $(0,2)^2 = 0,04 \leq 0,09$, la pièce est conforme ; pour $x = 12,4$, $(0,4)^2 = 0,16 > 0,09$, elle ne l'est pas. La forme au carré traite d'un coup les écarts dans les deux sens.

Réponse. a) $11,7 \leq x \leq 12,3$ · b) une tolérance de $\pm 0,3$ mm.

Correction de l'exercice 10 - Repérer une erreur

L'élève oublie les valeurs négatives : $(-5)^2 = 25 > 16$, et pourtant $-5 < 4$. On ramène tout à gauche et on factorise :

$$x^2 - 16 > 0 \Leftrightarrow (x - 4)(x + 4) > 0$$

Le coefficient dominant est positif : le produit est positif à l'extérieur des racines -4 et 4 .

La solution est $]-\infty; -4[\cup]4; +\infty[$, c'est-à-dire $x < -4$ **ou** $x > 4$.

Contrôle : $x = 0$ ne convient pas ($0 > 16$ est faux). À l'inverse, $x^2 < 16$ donne $]-4; 4[$. On teste toujours une valeur négative.

Réponse. $x < -4$ **ou** $x > 4$: la solution négative manquait.

Correction de l'exercice 11 - Un intervalle de fonctionnement

a) La valeur 5 est racine ($-50 + 200 - 150 = 0$). On met -2 en facteur :

$r(x) = -2(x^2 - 20x + 75)$, et $75 = 5 \times 15$, donc

$$r(x) = -2(x - 5)(x - 15)$$

b) Le coefficient dominant est négatif : r est positif entre ses racines, pour $x \in]5; 15[$, soit entre 500 et 1 500 tours. **Contrôle** : $r(10) = 50$ et $r(20) = -150$.

c) L'axe passe par le milieu des racines, $x = 10$: le rendement maximal vaut

$r(10) = -200 + 400 - 150 = 50\%$, atteint à 1 000 tours.

Réponse. a) $-2(x - 5)(x - 15)$ · b) $x \in]5; 15[$ · c) 50 % pour $x = 10$.

Correction de l'exercice 12 - Croiser une droite

a) Les points communs ont une abscisse qui vérifie $f(x) = 2x - 1$:

$$x^2 - 4x + 7 = 2x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$$

La valeur 2 est racine ($4 - 12 + 8 = 0$) et $8 = 2 \times 4$, donc $x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4)$: $x = 2$ ou $x = 4$. Les points sont $(2; 3)$ et $(4; 7)$ (**contrôle** : $f(2) = 3$, $f(4) = 7$).

b) La parabole est au-dessus de la droite quand $x^2 - 6x + 8 > 0$, c'est-à-dire à l'extérieur des racines : sur $]-\infty; 2[\cup]4; +\infty[$. **Contrôle** : en $x = 3$, $9 - 18 + 8 = -1 < 0$, la parabole est en dessous.

Réponse. a) $(2; 3)$ et $(4; 7)$ · b) sur $]-\infty; 2[\cup]4; +\infty[$.

Correction de l'exercice 13 - Une inéquation sans racine

On cherche l'extremum de chaque trinôme par la méthode de l'axe.

a) $x^2 - 6x + 13 = 13 \Leftrightarrow x(x - 6) = 0$: axe $x = 3$, et la valeur en 3 vaut $9 - 18 + 13 = 4$.

Comme $a > 0$, c'est un minimum : le trinôme vaut toujours au moins 4, il est strictement positif. Solution : **tous les réels**.

b) $-x^2 + 4x - 9 = -9 \Leftrightarrow -x(x - 4) = 0$: axe $x = 2$, et la valeur en 2 vaut

$$-4 + 8 - 9 = -5$$

Comme $a < 0$, c'est un maximum : le trinôme vaut au plus -5 , il est toujours strictement négatif. Il n'est jamais positif ou nul : **aucune solution**. Sans racine, le signe d'un trinôme est celui de a .

Réponse. a) tous les réels · b) aucune solution.

Correction de l'exercice 14 - Deux inéquations à distinguer

L'expression $(x - 1)(x - 6)$ a pour coefficient dominant $1 > 0$ et pour racines 1 et 6 : elle est négative entre les racines et positive à l'extérieur.

a) $(x - 1)(x - 6) \leq 0$ sur $[1; 6]$, racines incluses (inégalité large). **Contrôle** : en $x = 3$, $2 \times (-3) = -6$.

b) $(x - 1)(x - 6) \geq 0$ sur $]-\infty; 1] \cup [6; +\infty[$. **Contrôle** : en $x = 0$, 6 ; en $x = 8$, 14.

$$(x - 1)(x - 6) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 6$$

Les deux ensembles se rejoignent en 1 et 6, où l'expression est nulle : leur réunion est

l'ensemble des réels, leur intersection $\{1; 6\}$.

Réponse. a) $[1; 6]$ · b) $] -\infty; 1] \cup [6; +\infty[$.

Correction de l'exercice 15 - Un seuil de charge

a) La valeur 2 est racine ($12 - 48 + 36 = 0$). On met 3 en facteur : $c(x) = 3(x^2 - 8x + 12)$, et $12 = 2 \times 6$, donc

$$c(x) = 3(x - 2)(x - 6)$$

b) Le coefficient dominant est positif : $c(x) > 0$ à l'extérieur des racines, sur $] -\infty; 2[\cup]6; +\infty[$. Pour $x \geq 0$ (domaine physique), cela donne $[0; 2[\cup]6; +\infty[$.

c) L'axe passe par le milieu des racines, $x = 4$, et $c(4) = 48 - 96 + 36 = -12$ MPa : c'est le minimum ($a > 0$), une contrainte de compression.

Réponse. a) $3(x - 2)(x - 6)$ · b) hors $[2; 6]$ · c) minimum -12 MPa en $x = 4$.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : une plage utile

a) La valeur 3 est racine ($18 - 42 + 24 = 0$). On met 2 en facteur : $f(x) = 2(x^2 - 7x + 12)$, et $12 = 3 \times 4$, donc $f(x) = 2(x - 3)(x - 4)$.

b) Le coefficient dominant est positif : f est négative entre ses racines. Avec l'inégalité large, $f(x) \leq 0$ sur $[3; 4]$.

c) Tableau de signes :

x	$-\infty$	3	4	$+\infty$
$f(x)$	+	0 - 0		+

L'axe passe par le milieu des racines, $x = 3,5$, et

$$f(3,5) = 2 \times 0,5 \times (-0,5) = -0,5$$

Le minimum vaut $-0,5$ en $x = 3,5$. **Contrôle** : $f(1) = f(6) = 12$.

Réponse. a) $2(x - 3)(x - 4)$ · b) $[3; 4]$ · c) minimum $-0,5$ en $x = 3,5$.