

## Plaquette 2 – Sommet, axe de symétrie et variations

### Fonctions et polynômes du second degré – Première STI2D

Corrections détaillées

#### Boîte à outils

**Forme développée.**

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$$

| Signe de $a$ | Parabole             | Extremum       |
|--------------|----------------------|----------------|
| $a > 0$      | tournée vers le haut | <b>minimum</b> |
| $a < 0$      | tournée vers le bas  | <b>maximum</b> |

**Trouver l'axe sans formule.** On résout  $f(x) = c$  :

$$ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -\frac{b}{a}$$

L'axe de symétrie est la droite verticale qui passe par le **milieu** de ces deux valeurs ; le sommet est sur cet axe, et son ordonnée s'obtient en calculant l'image.

**Avec une forme factorisée**  $a(x - x_1)(x - x_2)$ , l'axe passe par le milieu des racines  $x_1$  et  $x_2$ .

**Variations.** Si  $x_S$  est l'abscisse du sommet :

| Signe de $a$ | Avant $x_S$  | Après $x_S$  |
|--------------|--------------|--------------|
| $a > 0$      | décroissante | croissante   |
| $a < 0$      | croissante   | décroissante |

**Symétrie.** Deux nombres à la même distance de l'axe ont la même image.

**Contrôle rapide.**  $f(0) = c$  : la courbe coupe l'axe des ordonnées en  $c$ .

#### Correction de l'exercice 1 – Sens de la parabole

Le sens de la parabole se lit sur le coefficient  $a$  de  $x^2$ , et seulement sur lui : si  $a > 0$ , la parabole est tournée vers le haut et le sommet est un **minimum** ; si  $a < 0$ , elle est tournée vers le bas et le sommet est un **maximum**.

- a)  $a = 2 > 0$  : tournée vers le haut, minimum.
- b)  $a = -3 < 0$  : tournée vers le bas, maximum.
- c)  $a = -0,5 < 0$  : tournée vers le bas, maximum ; la parabole est simplement plus « ouverte ».

$$a > 0 : \text{minimum} \quad a < 0 : \text{maximum}$$

Le signe de  $c$  ne joue aucun rôle :  $g$  a  $c = -20$  et pourtant un maximum.  $c$  est seulement l'ordonnée à l'origine ( $f(0) = 23$ ,  $g(0) = -20$ ,  $h(0) = 1$ ).

**Réponse.** a) vers le haut, minimum · b) et c) vers le bas, maximum.

#### Correction de l'exercice 2 – Coordonnées du sommet

On cherche l'axe de symétrie en résolvant  $f(x) = c$ , où  $c = f(0)$  : les deux solutions sont symétriques par rapport à l'axe, qui passe par leur milieu.

a)  $f(x) = 23 \Leftrightarrow 2x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow 2x(x - 6) = 0$ , donc  $x = 0$  ou  $x = 6$ . L'axe est  $x = 3$  et  $f(3) = 18 - 36 + 23 = 5 : S(3; 5)$ .

b)  $g(x) = -20 \Leftrightarrow -3x^2 + 18x = 0 \Leftrightarrow -3x(x - 6) = 0 : x = 0$  ou  $x = 6$ , axe  $x = 3$ , et  $g(3) = -27 + 54 - 20 = 7 : S(3; 7)$ .

c)  $h(x) = 11 \Leftrightarrow x^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow x(x + 8) = 0 : x = 0$  ou  $x = -8$ , axe  $x = -4$ , et  
 $h(-4) = 16 - 32 + 11 = -5 \quad S(-4; -5)$

Le sommet est un minimum en a) et c) ( $a > 0$ ), un maximum en b) ( $a < 0$ ).

**Réponse.** a)  $S(3; 5)$  · b)  $S(3; 7)$  · c)  $S(-4; -5)$ .

### Correction de l'exercice 3 - Trouver l'axe de symétrie

On applique la méthode de l'axe : les solutions de  $f(x) = c$  sont symétriques par rapport à l'axe.

a)  $f(x) = 23 \Leftrightarrow 2x(x - 6) = 0 : x = 0$  ou  $x = 6$ . L'axe est la droite  $x = 3$ .

b)  $g(x) = -20 \Leftrightarrow -3x(x - 6) = 0 : x = 0$  ou  $x = 6$ . L'axe est aussi  $x = 3$ .

c)  $k(x) = 1 \Leftrightarrow -0,5x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x(-0,5x + 4) = 0 : x = 0$  ou  $x = 8$ . L'axe est  $x = 4$ .

$$\text{axe: } x = \frac{0 + 8}{2} = 4$$

**Contrôle** pour c) :  $k(4) = -8 + 16 + 1 = 9$  et, par symétrie,  $k(8) = k(0) = 1$ . Les sommets sont  $(3; 5)$ ,  $(3; 7)$  et  $(4; 9)$ .

**Réponse.** a)  $x = 0$  ou  $x = 6$ , axe  $x = 3$  · b) axe  $x = 3$  · c)  $x = 0$  ou  $x = 8$ , axe  $x = 4$ .

### Correction de l'exercice 4 - Lire une forme factorisée

a) Les racines se lisent sur la forme factorisée :  $f(x) = 0$  pour  $x = 1$  et  $x = 3$ . L'axe passe par leur milieu,  $x = 2$ , et  $f(2) = 3 \times 1 \times (-1) = -3$  : le sommet est  $S(2; -3)$ . Comme  $a = 3 > 0$ , c'est un **minimum**. En développant,  $f(x) = 3(x^2 - 4x + 3) = 3x^2 - 12x + 9$ .

b)  $g(x) = 0$  pour  $x = -5$  et  $x = 1$ . L'axe est la droite  $x = -2$ , et

$$g(-2) = -2 \times 3 \times (-3) = 18 \quad S(-2; 18)$$

Comme  $a = -2 < 0$ , c'est un **maximum**. En développant,  $g(x) = -2(x^2 + 4x - 5) = -2x^2 - 8x + 10$ . **Contrôle** :  $g(0) = -2 \times 5 \times (-1) = 10$ .

**Réponse.** a) racines 1 et 3,  $S(2; -3)$ , minimum,  $3x^2 - 12x + 9$  · b) racines  $-5$  et 1,  $S(-2; 18)$ , maximum,  $-2x^2 - 8x + 10$ .

### Correction de l'exercice 5 - Tableau de variations

On commence par trouver le sommet (exercice précédent) :  $S(3; 5)$  pour  $f$  et  $S(3; 7)$  pour  $g$ . Les variations changent au sommet, dans un sens fixé par le signe de  $a$ .

a)  $a = 2 > 0$  :  $f$  décroît puis croît, avec un minimum 5 en  $x = 3$ .

|        |           |   |           |
|--------|-----------|---|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | 3 | $+\infty$ |
| $f(x)$ | décroît   | 5 | croît     |

b)  $a = -3 < 0$  :  $g$  croît puis décroît, avec un maximum 7 en  $x = 3$ .

|        |           |   |           |
|--------|-----------|---|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | 3 | $+\infty$ |
| $g(x)$ | croît     | 7 | décroît   |

**Contrôle** de la symétrie :  $f(2) = f(4) = 7$  et  $g(2) = g(4) = 4$ . Ainsi  $f(x) \geq 5$  et  $g(x) \leq 7$  pour

tout  $x$ .

$$f(x) \geq 5 \quad g(x) \leq 7$$

**Réponse.** a) minimum 5 en 3 · b) maximum 7 en 3.

### Correction de l'exercice 6 - Utiliser la symétrie

La parabole est symétrique par rapport à l'axe  $x = 3$  : deux abscisses à la même distance de 3 ont la même image.

a)  $f(1) = 2 - 12 + 23 = 13$ . Le nombre 1 est à distance 2 de l'axe ; son symétrique est  $3 + 2 = 5$ , donc  $f(5) = 13$  (**contrôle** :  $50 - 60 + 23 = 13$ ).

b)  $f(0) = 23$  ; le symétrique de 0 est 6, donc  $f(6) = 23$ .

c)  $x = 1$  est une solution de  $f(x) = 13$  ; l'autre est son symétrique par rapport à 3 :

$$x = 2 \times 3 - 1 = 5$$

Les deux solutions de  $f(x) = k$  ont pour milieu l'abscisse du sommet :  $\frac{1+5}{2} = 3$ . La symétrie évite ici un calcul.

**Réponse.** a)  $f(1) = f(5) = 13$  · b)  $f(0) = f(6) = 23$  · c)  $x = 5$ .

### Correction de l'exercice 7 - Retrouver une fonction

a) La fonction s'annule en 2 et en 6, donc elle s'écrit  $f(x) = a(x-2)(x-6)$ . Le point  $(4; -8)$  est sur la courbe :

$$a(4-2)(4-6) = -8 \Leftrightarrow -4a = -8 \Leftrightarrow a = 2$$

b)  $f(x) = 2(x-2)(x-6) = 2(x^2 - 8x + 12) = 2x^2 - 16x + 24$ .

c) L'axe passe par le milieu des racines,  $x = 4$  : le sommet est  $(4; -8)$ , un minimum car  $a > 0$ .

**Contrôle** :  $f(0) = 24$  et, par symétrie,  $f(8) = 2 \times 64 - 128 + 24 = 24$ .

**Réponse.** a)  $a = 2$  · b)  $2x^2 - 16x + 24$  · c)  $S(4; -8)$ , un minimum.

### Correction de l'exercice 8 - Comparer deux paraboles

a) Pour  $f$ , on résout  $f(x) = 10$  :  $x^2 - 6x = 0$ , soit  $x(x-6) = 0$ , d'où l'axe  $x = 3$  et le sommet  $S_f(3; 1)$ , car  $f(3) = 9 - 18 + 10 = 1$ . Pour  $g$ ,  $g(x) = -4$  donne  $-x(x-6) = 0$ , même axe  $x = 3$ , et  $g(3) = -9 + 18 - 4 = 5$  :  $S_g(3; 5)$ .

b)  $f$  a un minimum de 1 ( $a > 0$ ) et  $g$  un maximum de 5 ( $a < 0$ ) :

$$f(x) \geq 1 \quad g(x) \leq 5$$

Les courbes se coupent-elles ? En  $x = 3$ ,  $f(3) = 1 < g(3) = 5$  ; en  $x = 0$ ,  $f(0) = 10 > g(0) = -4$ . La différence  $f - g$  change de signe entre 0 et 3 : les courbes se coupent entre 0 et 3 et, par symétrie par rapport à l'axe commun, entre 3 et 6.

**Réponse.** a)  $S_f(3; 1)$  et  $S_g(3; 5)$  · b) minimum 1 pour  $f$ , maximum 5 pour  $g$ .

### Correction de l'exercice 9 - Repérer une erreur

L'élève a confondu le sommet avec une valeur prise au hasard. On trouve l'axe en résolvant  $f(x) = -20$  :

$$-3x^2 + 18x = 0 \Leftrightarrow -3x(x-6) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 6$$

L'axe est donc  $x = 3$ , et non  $x = -3$ . Le maximum vaut  $f(3) = -27 + 54 - 20 = 7$ .

**Contrôle** :  $f(-3) = -27 - 54 - 20 = -101$ , bien plus bas que 7, alors que le sommet doit

donner la plus grande valeur puisque  $a < 0$ . Et  $f(2) = f(4) = 4$  : le milieu de 2 et 4 est bien 3.

**Réponse.** L'axe est  $x = 3$  (les solutions de  $f(x) = -20$  sont 0 et 6), et le maximum vaut 7.

### Correction de l'exercice 10 - Une trajectoire

a) Au départ,  $x = 0$  :  $h(0) = 1$  m, la hauteur de la buse.

b) On cherche l'axe en résolvant  $h(x) = 1$  :  $-0,5x^2 + 4x = 0$ , soit  $x(-0,5x + 4) = 0$ , d'où  $x = 0$  ou  $x = 8$ . L'axe est  $x = 4$  et

$$h(4) = -8 + 16 + 1 = 9 \text{ m}$$

C'est un maximum ( $a < 0$ ) : le jet monte à 9 m.

c) 8 et 0 sont symétriques par rapport à 4, donc  $h(8) = h(0) = 1$  m (**contrôle** :  $-32 + 32 + 1 = 1$ ).

Le jet touche le sol entre  $x = 8$  et  $x = 9$  :  $h(8) = 1 > 0$  et  $h(9) = -3,5 < 0$ . Par balayage,  $h(8,2) \approx 0,18$  et  $h(8,3) \approx -0,25$  : la portée vaut environ 8,2 m.

**Réponse.** a) 1 m · b) 9 m en  $x = 4$  · c) 1 m.

### Correction de l'exercice 11 - Un problème de dimension

a) Le demi-périmètre vaut 30 cm : si la largeur vaut  $x$ , la longueur vaut  $30 - x$ , et l'aire

$$A(x) = x(30 - x) = -x^2 + 30x \quad (0 < x < 30)$$

b) L'aire s'annule en  $x = 0$  et  $x = 30$  ; l'axe de la parabole passe par le milieu,  $x = 15$ . Comme  $a = -1 < 0$ , c'est un maximum :  $A(15) = 15 \times 15 = 225 \text{ cm}^2$ .

La longueur vaut alors  $30 - 15 = 15$  cm : la plaque optimale est un **carré**. **Contrôle** :  $A(10) = A(20) = 200 \text{ cm}^2$ , moins que 225. À périmètre fixé, le carré a la plus grande aire.

**Réponse.** a)  $A(x) = -x^2 + 30x$  · b)  $225 \text{ cm}^2$ , pour un carré de 15 cm.

### Correction de l'exercice 12 - Lire un graphique

a) La courbe coupe l'axe des abscisses en 0 et  $-4$ , donc  $f(x) = a x(x + 4)$ . Le sommet est sur l'axe de symétrie, au milieu des racines, en  $x = -2$ , et il vaut 8 :

$$f(-2) = a \times (-2) \times 2 = -4a = 8 \Leftrightarrow a = -2$$

b)  $f(x) = -2x(x + 4) = -2x^2 - 8x$ .

c)  $f(-3) = -2 \times (-3) \times 1 = 6$ . **Contrôle** par symétrie :  $-3$  et  $-1$  sont symétriques par rapport à  $-2$ , et  $f(-1) = -2 \times (-1) \times 3 = 6$ .

Comme  $a = -2 < 0$ , le sommet  $(-2; 8)$  est bien un maximum, cohérent avec la lecture du graphique.

**Réponse.** a)  $a = -2$  · b)  $-2x^2 - 8x$  · c)  $f(-3) = 6$ .

### Correction de l'exercice 13 - Deux paraboles à distinguer

a) Un carré est toujours positif ou nul, et nul seulement quand son contenu est nul :

$(x - 3)^2 \geq 0$ , avec égalité pour  $x = 3$ . Donc  $f(x) = (x - 3)^2 + 4 \geq 4$ , avec  $f(3) = 4$  : le minimum de  $f$  est 4, atteint en  $x = 3$ . De même,  $g(x) \geq -4$ , avec  $g(3) = -4$ . Les sommets sont  $(3; 4)$  et  $(3; -4)$ .

b)  $f(x) \geq 4 > 0$  : la courbe de  $f$  ne coupe **jamais** l'axe des abscisses. Pour  $g$ , le minimum est négatif, la courbe descend sous l'axe : on résout

$$(x - 3)^2 = 4 \Leftrightarrow x - 3 = 2 \text{ ou } x - 3 = -2 \Leftrightarrow x = 5 \text{ ou } x = 1$$

**Contrôle :**  $g(1) = 4 - 4 = 0$  et  $g(5) = 0$ . Seule  $g$  coupe l'axe.

**Réponse.** a)  $S_f(3; 4)$  et  $S_g(3; -4)$  · b) seule  $g$ , en  $x = 1$  et  $x = 5$ .

### Correction de l'exercice 14 - Un sommet imposé

a) On résout  $f(x) = 48 : 2x^2 + bx = 0$ , soit  $x(2x + b) = 0$ , d'où  $x = 0$  ou  $x = -\frac{b}{2}$ . L'axe passe par le milieu de ces deux valeurs, en  $x = -\frac{b}{4}$ . Pour que l'axe soit  $x = 5$  :

$$-\frac{b}{4} = 5 \Leftrightarrow b = -20$$

b)  $f(x) = 2x^2 - 20x + 48$ , et le sommet vaut  $f(5) = 50 - 100 + 48 = -2$ .

c) 7 et 3 sont symétriques par rapport à 5, donc  $f(7) = f(3) = 18 - 60 + 48 = 6$  (**contrôle direct** :  $98 - 140 + 48 = 6$ ).

On peut aussi vérifier que 4 est racine ( $32 - 80 + 48 = 0$ ) ; son symétrique 6 l'est aussi, d'où  $f(x) = 2(x - 4)(x - 6)$ .

**Réponse.** a)  $b = -20$  · b)  $2x^2 - 20x + 48$ , sommet  $(5; -2)$  · c)  $f(7) = 6$ .

### Correction de l'exercice 15 - Encadrer une parabole

a) Le sommet de  $f$  est  $S(3; 5)$  (exercices précédents) et 3 appartient à  $[0; 5]$ . Comme  $a > 0$ , c'est le minimum de  $f$  sur l'intervalle : 5 **en**  $x = 3$ .

b)  $f$  décroît sur  $[0; 3]$  puis croît sur  $[3; 5]$  : le maximum est atteint à l'une des bornes. On compare  $f(0) = 23$  et  $f(5) = 50 - 60 + 23 = 13$  :

$$\max = f(0) = 23$$

La borne 0 est plus loin de l'axe (3 unités) que la borne 5 (2 unités), et pour  $a > 0$ , plus on s'éloigne de l'axe, plus  $f$  est grande. Sur  $[0; 5]$ , on a donc  $5 \leq f(x) \leq 23$ . Sur un intervalle fermé, on teste toujours le sommet **et** les bornes.

**Réponse.** a) minimum 5 en  $x = 3$  · b) maximum 23 en  $x = 0$ .

### Correction de l'exercice 16 - Synthèse : trois formes

a) On résout  $f(x) = -24 : -2x^2 + 16x = 0$ , soit  $-2x(x - 8) = 0$ , d'où  $x = 0$  ou  $x = 8$ . L'axe est  $x = 4$ , et  $f(4) = -32 + 64 - 24 = 8$  : le sommet est  $S(4; 8)$ .

b) On vérifie que 2 est racine :  $f(2) = -8 + 32 - 24 = 0$ . Son symétrique par rapport à l'axe, 6, est l'autre racine. Comme  $a = -2$  :

$$f(x) = -2(x - 2)(x - 6)$$

**Contrôle :**  $-2(x^2 - 8x + 12) = -2x^2 + 16x - 24$ .

c)  $a < 0$  :  $f$  croît sur  $]-\infty; 4]$  puis décroît sur  $[4; +\infty[$ , avec un maximum 8 en  $x = 4$ . Elle est positive entre ses racines 2 et 6, négative ailleurs ( $f(0) = -24$ ).

**Réponse.** a) axe  $x = 4$ ,  $S(4; 8)$  · b)  $-2(x - 2)(x - 6)$  · c) maximum 8 en  $x = 4$  ;  $f > 0$  sur  $]2; 6[$ .