

Plaquette 1 - Sommet, variations et lecture des formes

Fonctions et polynômes du second degré — Première STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Méthodes du cours (sans discriminant ni formule du sommet).

- $f(x) = ax^2 + bx + c$: la parabole est tournée vers le haut si $a > 0$ (**minimum**), vers le bas si $a < 0$ (**maximum**).
- **Axe de symétrie** : on résout $f(x) = c$, c'est-à-dire $x(ax + b) = 0$. Les solutions 0 et $-\frac{b}{a}$ sont symétriques : l'axe passe par leur milieu.

$$f(x) = c \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -\frac{b}{a}$$

- **Sommet** : il est sur l'axe ; son ordonnée est l'image de son abscisse. Deux valeurs symétriques par rapport à l'axe ont la même image.
- **Forme factorisée** $a(x - x_1)(x - x_2)$: racines x_1 et x_2 , axe au milieu des racines ; f a le signe de a à l'extérieur des racines et le signe contraire entre elles.
- **Factoriser** : facteur commun, identité remarquable, ou racine évidente puis symétrie.
- **Taux de variation** entre u et v : $\frac{f(v) - f(u)}{v - u}$, pente de la sécante.

Correction de l'exercice 1 - Reconnaître le sens de la parabole

Tout se lit sur le signe du coefficient a de x^2 : vers le haut et un **minimum** si $a > 0$, vers le bas et un **maximum** si $a < 0$.

- $a = 2 > 0$: parabole tournée vers le **haut**, minimum.
- $a = -0,5 < 0$: parabole tournée vers le **bas**, maximum.
- $h(x) = -x^2 + 5$, donc $a = -1 < 0$: tournée vers le bas, maximum.

$$h(x) = 5 - x^2 \leq 5$$

Pour c), comme $x^2 \geq 0$, on a $h(x) \leq 5$, avec égalité en $x = 0$: le maximum vaut 5, atteint en 0.

Réponse. a) haut, minimum · b) bas, maximum · c) bas, maximum.

Correction de l'exercice 2 - Coordonnées du sommet

On trouve l'axe de symétrie en résolvant $f(x) = 11$ (le terme constant) : les deux solutions sont symétriques par rapport à l'axe.

$$x^2 - 6x + 11 = 11 \Leftrightarrow x(x - 6) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 6$$

L'axe passe par le milieu, $x = 3$, et $f(3) = 9 - 18 + 11 = 2$: le sommet est $S(3 ; 2)$. Comme $a = 1 > 0$, c'est un **minimum**.

Contrôle par la symétrie : $f(2) = 3$ et $f(4) = 3$, deux valeurs égales de part et d'autre de 3.

Réponse. $S(3 ; 2)$, minimum.

Correction de l'exercice 3 - Vérifier une écriture

- a) On développe : $(x - 3)^2 + 2 = x^2 - 6x + 9 + 2 = x^2 - 6x + 11$, c'est bien $f(x)$.
 b) Un carré est toujours positif ou nul : $(x - 3)^2 \geq 0$, nul seulement pour $x = 3$. Donc

$$f(x) = (x - 3)^2 + 2 \geq 2$$

avec égalité seulement en $x = 3$. Le minimum de f vaut 2, atteint en $x = 3$, ce qui confirme le sommet $S(3; 2)$ trouvé à l'exercice précédent. Cette écriture montre aussi que f ne s'annule jamais.

Réponse. a) en développant, $(x - 3)^2 + 2 = x^2 - 6x + 11$ · b) minimum 2 en $x = 3$.

Correction de l'exercice 4 - Lire différentes écritures

On lit chaque écriture selon sa forme.

- a) $f(x) = 3x^2 - 12$ est de la forme $ax^2 + c$: l'axe est l'axe des ordonnées, et le sommet est $(0; -12)$, un **minimum** car $a = 3 > 0$. Racines : $3x^2 = 12$, soit $x^2 = 4$, d'où $x = -2$ et $x = 2$.

- b) $g(x) = -2(x + 4)(x - 2)$ est factorisée : racines -4 et 2 . L'axe passe par leur milieu, $x = -1$, et

$$g(-1) = -2 \times 3 \times (-3) = 18$$

C'est un **maximum** ($a = -2 < 0$).

- c) $h(x) = 0,5x^2$: sommet $(0; 0)$, minimum ; la seule racine est 0, la parabole touche l'axe en son sommet.

Réponse. a) $S(0; -12)$, minimum, racines ± 2 · b) $S(-1; 18)$, maximum, racines -4 et 2 · c) $S(0; 0)$, minimum, racine 0.

Correction de l'exercice 5 - Tableau de variations

On cherche l'axe en résolvant $f(x) = -10$: $-2x^2 + 12x = 0$, soit $-2x(x - 6) = 0$, d'où $x = 0$ ou $x = 6$. L'axe est $x = 3$ et

$$f(3) = -18 + 36 - 10 = 8$$

Le sommet est $S(3; 8)$. Comme $a < 0$, la fonction **croît puis décroît**, avec un maximum de 8 en $x = 3$.

Intervalle	$] -\infty ; 3]$	$[3 ; +\infty [$
Variations de f	croissante	décroissante
Valeurs	jusqu'à 8	à partir de 8

Contrôle : $f(0) = f(6) = -10$, valeurs symétriques autour de 3.

Réponse. Sommet $S(3; 8)$, maximum ; croissante puis décroissante.

Correction de l'exercice 6 - Racines par factorisation

On factorise, puis on utilise la règle du produit nul.

- a) $x^2 - 5x = x(x - 5) = 0$, donc $x = 0$ ou $x = 5$.
 b) $x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4) = 0$ (identité $a^2 - b^2$), donc $x = 4$ ou $x = -4$.
 c) $2x^2 - 18 = 2(x^2 - 9) = 2(x - 3)(x + 3) = 0$, donc $x = 3$ ou $x = -3$.

Piège. Dans a), on ne divise pas par x : on perdrait la solution $x = 0$.

Réponse. a) $\{0; 5\}$ · b) $\{-4; 4\}$ · c) $\{-3; 3\}$.

Correction de l'exercice 7 - Un carré moins un nombre

a) $(x - 4)^2 - 9 = 0$ donne $(x - 4)^2 = 9$. Un nombre dont le carré vaut 9 vaut 3 ou -3 : $x - 4 = 3$ ou $x - 4 = -3$, d'où $x = 7$ et $x = 1$.

b) On reconnaît une différence de deux carrés, $(x - 4)^2 - 3^2$:

$$f(x) = [(x - 4) - 3][(x - 4) + 3] = (x - 7)(x - 1)$$

Contrôle : $(x - 7)(x - 1) = x^2 - 8x + 7$ et $(x - 4)^2 - 9 = x^2 - 8x + 16 - 9 = x^2 - 8x + 7$. Les racines 1 et 7 sont symétriques par rapport à 4, l'abscisse du sommet.

Réponse. a) $\{1; 7\}$ · b) $f(x) = (x - 7)(x - 1)$.

Correction de l'exercice 8 - Signe d'un polynôme factorisé

La forme factorisée donne directement les racines : 2 et 6. Le coefficient de x^2 vaut $1 > 0$.

— Règle du cours : f est **positive à l'extérieur** des racines, **négative entre** elles.

Intervalle	$] -\infty ; 2[$	$] 2 ; 6[$	$] 6 ; +\infty [$
Signe de $f(x)$	+	−	+

— L'inéquation $f(x) \leq 0$ a donc pour solutions $[2; 6]$ (bornes incluses, car f y est nulle).

— Contrôle : $f(4) = (2) \times (-2) = -4 < 0$ et $f(0) = 12 > 0$. Cohérent.

Réponse. $f \geq 0$ hors de $[2; 6]$, $f \leq 0$ sur $[2; 6]$.

Correction de l'exercice 9 - Problème : trajectoire d'un jet d'eau

a) $a = -0,25 < 0$: la parabole est tournée vers le bas, le sommet donne la hauteur maximale. On factorise d'abord : $h(x) = x(-0,25x + 2)$, qui s'annule en $x = 0$ et en $x = 8$. L'axe passe par le milieu des racines, $x = 4$, et

$$h(4) = -0,25 \times 16 + 8 = 4$$

La hauteur maximale vaut 4 **m**, atteinte à 4 m de la buse.

b) Le jet est au sol quand $h(x) = 0$, c'est-à-dire en $x = 0$ (la buse) et en $x = 8$: il retombe à 8 **m**. Le sommet est bien au milieu du trajet, par symétrie de la parabole.

Réponse. a) 4 m de haut à 4 m de la buse · b) retombée à 8 m.

Correction de l'exercice 10 - Problème : aire maximale d'un enclos

a) Le périmètre vaut 60 m, donc largeur et longueur font ensemble 30 m : la longueur vaut $30 - x$, et

$$A(x) = x(30 - x) = -x^2 + 30x \quad (0 < x < 30)$$

b) L'aire s'annule en $x = 0$ et en $x = 30$; l'axe de la parabole passe par le milieu, $x = 15$. Comme $a = -1 < 0$, c'est un maximum : $A(15) = 15 \times 15 = 225 \text{ m}^2$.

L'aire est maximale pour un **carré de 15 m de côté**. **Contrôle** : $A(10) = A(20) = 200 \text{ m}^2$, moins que 225.

Réponse. a) $A(x) = -x^2 + 30x$ · b) carré de 15 m, aire 225 m^2 .

Correction de l'exercice 11 - Une parabole de la forme $ax^2 + c$

a) $f(-x) = -2x^2 + 8 = f(x)$: deux nombres opposés ont la même image, l'axe de symétrie est l'axe des ordonnées ($x = 0$). Le sommet est $(0; 8)$, un maximum car $a = -2 < 0$.

b) $-2x^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 2$.

$$f(x) = -2(x^2 - 4) = -2(x - 2)(x + 2)$$

c) Le coefficient de x^2 est négatif : f est positive entre les racines, sur $]-2; 2[$, et négative à l'extérieur. **Contrôle** : $f(0) = 8 > 0$ et $f(3) = -10 < 0$.

Réponse. a) axe $x = 0$, sommet $(0; 8)$ · b) $x = -2$ ou $x = 2$ · c) positive sur $]-2; 2[$, négative ailleurs.

Correction de l'exercice 12 - Vérifier une racine conjecturée

a) $f(2) = 4 + 4 - 8 = 0$: 2 est bien racine.

b) On peut donc écrire $f(x) = (x - 2)(x - s)$. En développant, le terme constant vaut $2 \times s$; il doit valoir -8 , d'où $s = -4$:

$$f(x) = (x - 2)(x + 4)$$

Contrôle : $(x - 2)(x + 4) = x^2 + 4x - 2x - 8 = x^2 + 2x - 8$. L'autre racine est -4 ; l'axe de symétrie passe par le milieu des racines, en $x = -1$.

Réponse. a) $f(2) = 0$ · b) $f(x) = (x - 2)(x + 4)$, autre racine -4 .

Correction de l'exercice 13 - Une racine par balayage

a) $f(0) = -1 < 0$ et $f(1) = 1 > 0$: la fonction change de signe entre 0 et 1, la racine est dans cet intervalle.

b) On calcule les valeurs de 0,1 en 0,1 : $f(0,6) = -0,04$ et $f(0,7) = 0,19$, donc la racine est entre 0,6 et 0,7. On affine au centième :

$$f(0,61) \approx -0,018 < 0 < f(0,62) \approx 0,004$$

La racine est comprise entre 0,61 et 0,62. C'est ainsi qu'on résout une équation du second degré quand les racines ne sont pas évidentes (le programme n'utilise pas de formule) ; un solveur ou un programme Python font la même chose plus vite.

Réponse. a) $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$ · b) entre 0,61 et 0,62.

Correction de l'exercice 14 - Taux de variation et sécante

a) Le taux de variation entre 1 et 4 est la variation de f divisée par la variation de x :

$$\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{5 - 2}{3} = 1$$

b) C'est le coefficient directeur de la **sécante** qui passe par les points $(1; 2)$ et $(4; 5)$ de la courbe : entre ces deux points, f augmente en moyenne de 1 quand x augmente de 1. La sécante a pour équation $y = x + 1$ (**contrôle** : $1 + 1 = 2$ et $4 + 1 = 5$).

Réponse. a) 1 · b) coefficient directeur de la sécante passant par $(1; 2)$ et $(4; 5)$.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : trois formes d'une même fonction

a) On résout $f(x) = 12$: $x^2 - 8x = 0$, soit $x(x - 8) = 0$, d'où $x = 0$ ou $x = 8$. L'axe est $x = 4$ et $f(4) = 16 - 32 + 12 = -4$: le sommet est $S(4; -4)$, un minimum.

b) La valeur 2 est racine ($4 - 16 + 12 = 0$) ; son symétrique par rapport à 4, soit 6, aussi. D'où

$$f(x) = (x - 2)(x - 6)$$

Contrôle : $(x - 2)(x - 6) = x^2 - 8x + 12$.

c) Le coefficient de x^2 est positif : f est positive à l'extérieur de $[2 ; 6]$, négative entre les racines.

Intervalle	$] -\infty ; 2[$	$] 2 ; 6[$	$] 6 ; +\infty[$
Signe de $f(x)$	+	–	+

Chaque écriture a son usage : développée pour le calcul, sommet pour l'extremum, factorisée pour les racines et le signe.

Réponse. a) axe $x = 4$, sommet $(4 ; -4)$ · b) $f(x) = (x - 2)(x - 6)$ · c) +, –, +.