

Plaquette 2 - Forme algébrique : calculs, conjugué et quotient

Nombres complexes — Première STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Écriture algébrique. $z = a + ib$, avec a et b **réels** et

$$i^2 = -1$$

- $a = \operatorname{Re}(z)$ est la partie réelle, $b = \operatorname{Im}(z)$ la partie imaginaire (c'est un **réel**, sans le i).
- z est **réel** si $b = 0$; il est **imaginaire pur** si $a = 0$.
- **Égalité** : $a + ib = a' + ib'$ si et seulement si $a = a'$ **et** $b = b'$.

Les quatre opérations.

- **Somme** : on ajoute les parties réelles entre elles, les parties imaginaires entre elles.
- **Produit** : on développe, puis on remplace i^2 par -1 .
- **Puissances de i** : elles se répètent de quatre en quatre.

n	0	1	2	3	4	5
i^n	1	i	-1	$-i$	1	i

Conjugué. $\bar{z} = a - ib$. Sa propriété décisive :

$$z \times \bar{z} = a^2 + b^2$$

c'est un nombre **réel positif**, ce qui permet de faire disparaître i d'un dénominateur.

Quotient. On multiplie le numérateur et le dénominateur par le **conjugué du dénominateur** :

$$\frac{z}{z'} = \frac{z \times \bar{z'}}{z' \times \bar{z'}}$$

⚠ Un résultat doit toujours être rendu sous la forme $a + ib$: tant qu'il reste un i au dénominateur, le calcul n'est pas terminé.

Correction de l'exercice 1 - Parties réelle et imaginaire

Un nombre complexe s'écrit $a + ib$ avec a et b réels : a est sa partie réelle, b sa partie imaginaire.

- $z_1 = 3 - 5i$: $\operatorname{Re}(z_1) = 3$ et $\operatorname{Im}(z_1) = -5$, et non $-5i$.
- $z_2 = -7i = 0 - 7i$: $\operatorname{Re}(z_2) = 0$ et $\operatorname{Im}(z_2) = -7$; z_2 est un **imaginaire pur**.
- $z_3 = 4 = 4 + 0i$: $\operatorname{Re}(z_3) = 4$ et $\operatorname{Im}(z_3) = 0$; z_3 est un **réel**.

$$z = a + ib \quad \operatorname{Re}(z) = a \quad \operatorname{Im}(z) = b$$

La partie imaginaire est un nombre **réel** : le i n'en fait pas partie. Sur la figure, un réel est sur l'axe horizontal, un imaginaire pur sur l'axe vertical.

Réponse. 3 et -5 ; 0 et -7 ; 4 et 0.

Correction de l'exercice 2 - Somme et différence

On additionne séparément les parties réelles et les parties imaginaires.

Somme : $z_1 + z_2 = (4 - 2) + (3 + 7)i = 2 + 10i$.

Différence : le signe moins porte sur les **deux** parties de z_2 :

$$z_1 - z_2 = (4 + 3i) - (-2 + 7i) = 4 + 3i + 2 - 7i = 6 - 4i$$

L'erreur classique consiste à ne changer qu'un seul des deux signes de z_2 .

Géométriquement, le point image de $z_1 + z_2$ est le quatrième sommet du parallélogramme construit sur O , z_1 et z_2 .

Réponse. $z_1 + z_2 = 2 + 10i$ et $z_1 - z_2 = 6 - 4i$.

Correction de l'exercice 3 - Un produit

On développe comme un produit de deux binômes, puis on remplace i^2 par -1 :

$$(2 + 3i)(4 - i) = 8 - 2i + 12i - 3i^2 = 8 + 10i + 3 = 11 + 10i$$

Le terme $-3i^2$ vaut $-3 \times (-1) = +3$: c'est lui qui transforme un produit d'imaginaires en partie réelle. Le garder tel quel est le piège principal. **Contrôle** :

$$|2 + 3i| \times |4 - i| = \sqrt{13} \times \sqrt{17} = \sqrt{221}, \text{ et } |11 + 10i| = \sqrt{121 + 100} = \sqrt{221}.$$

Réponse. $11 + 10i$.

Correction de l'exercice 4 - Puissances de i

On part de $i^2 = -1$: alors $i^3 = i^2 \times i = -i$ et $i^4 = i^2 \times i^2 = 1$. Comme $i^4 = 1$, les puissances de i se répètent de quatre en quatre ; seul le **reste** de la division de l'exposant par 4 compte.

— $15 = 4 \times 3 + 3$, donc $i^{15} = (i^4)^3 \times i^3 = 1 \times (-i) = -i$.

— $2026 = 4 \times 506 + 2$, donc

$$i^{2026} = (i^4)^{506} \times i^2 = 1 \times (-1) = -1$$

Contrôle : $i^{16} = (i^4)^4 = 1$, et $i^{15} = \frac{i^{16}}{i} = \frac{1}{i} = -i$.

Réponse. -1 ; $-i$; 1 ; puis $i^{15} = -i$ et $i^{2026} = -1$.

Correction de l'exercice 5 - Un carré

On applique l'identité $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = 3$ et $b = 2i$, en remarquant que $(2i)^2 = 4i^2 = -4$:

$$(3 + 2i)^2 = 9 + 12i + (2i)^2 = 9 + 12i - 4 = 5 + 12i$$

Attention : $(2i)^2$ vaut -4 , ni 4 ni $-4i$. **Vérification** par le développement complet :

$$(3 + 2i)(3 + 2i) = 9 + 6i + 6i + 4i^2 = 5 + 12i. \text{ Le module se contrôle aussi : }$$

$$|5 + 12i| = 13 = |3 + 2i|^2.$$

Réponse. $(3 + 2i)^2 = 5 + 12i$.

Correction de l'exercice 6 - Produit d'un complexe par son conjugué

Le conjugué de $z = a + ib$ est $\bar{z} = a - ib$. Pour $z = 5 - 2i$, $\bar{z} = 5 + 2i$ et l'identité $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ donne

$$z\bar{z} = 25 - (2i)^2 = 25 + 4 = 29$$

Pour $z = 2 + 5i$, on applique directement la formule générale $z\bar{z} = a^2 + b^2 = 4 + 25 = 29$.

Le produit d'un complexe par son conjugué est toujours un **réel positif** : c'est le carré du module. C'est cette propriété qui permet de faire disparaître i d'un dénominateur. Sur la figure, z et $\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des réels.

Réponse. 29 dans les deux cas.

Correction de l'exercice 7 - Un premier quotient

Pour écrire un quotient sous forme algébrique, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le **conjugué du dénominateur**, ici $2 + i$. Le dénominateur devient réel, $(2 - i)(2 + i) = 4 + 1 = 5$, et le numérateur vaut $(3 + i)(2 + i) = 6 + 5i - 1 = 5 + 5i$:

$$\frac{3 + i}{2 - i} = \frac{5 + 5i}{5} = 1 + i$$

Vérification : $(1 + i)(2 - i) = 2 - i + 2i + 1 = 3 + i$. On retrouve bien le numérateur.

Réponse. $1 + i$.

Correction de l'exercice 8 - Un quotient à coefficients décimaux

On multiplie en haut et en bas par le conjugué $3 - 4i$; le dénominateur devient $3^2 + 4^2 = 25$. Le numérateur vaut $(1 + 2i)(3 - 4i) = 3 - 4i + 6i - 8i^2 = 11 + 2i$, donc

$$\frac{1 + 2i}{3 + 4i} = \frac{11 + 2i}{25} = \frac{11}{25} + \frac{2}{25}i = 0,44 + 0,08i$$

Vérification : $(0,44 + 0,08i)(3 + 4i) = 1,32 + 1,76i + 0,24i - 0,32 = 1 + 2i$. Le dénominateur s'obtient sans développer : c'est toujours $a^2 + b^2$.

Réponse. $\frac{11}{25} + \frac{2}{25}i = 0,44 + 0,08i$.

Correction de l'exercice 9 - Un inverse

On multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué $2 - 3i$; le dénominateur devient $2^2 + 3^2 = 13$:

$$\frac{1}{2 + 3i} = \frac{2 - 3i}{13} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i \approx 0,154 - 0,231i$$

Vérification : $(2 + 3i) \times \frac{2 - 3i}{13} = \frac{4 + 9}{13} = 1$, c'est bien l'inverse. On retient la formule générale $\frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$.

Réponse. $\frac{2}{13} - \frac{3}{13}i \approx 0,154 - 0,231i$.

Correction de l'exercice 10 - Résoudre une équation

On isole z en divisant par $2 + i$, puis on écrit le quotient sous forme algébrique avec le conjugué $2 - i$:

$$z = \frac{5}{2 + i} = \frac{5(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = \frac{10 - 5i}{5} = 2 - i$$

Vérification : $(2 + i)(2 - i) = 4 + 1 = 5$. Elle est immédiate, car ce produit est celui d'un complexe par son conjugué, égal au carré de son module, $|2 + i|^2 = 5$.

Réponse. $z = 2 - i$.

Correction de l'exercice 11 - Deux complexes égaux

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles sont égales **et** leurs parties imaginaires sont égales. Comme x et y sont réels, l'égalité donne deux équations :

$$x + 2 = 5 \quad \text{et} \quad y - 3 = -1$$

d'où $x = 3$ et $y = 2$.

Vérification : $(3 + 2) + (2 - 3)i = 5 - i$. Une égalité de complexes équivaut à deux équations réelles ; la règle suppose que x et y sont réels.

Réponse. $x = 3$ et $y = 2$.

Correction de l'exercice 12 - Puissances de $1 + i$

On développe le carré avec $i^2 = -1$:

$$(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$$

La partie réelle disparaît : $(1 + i)^2$ est un imaginaire pur.

Pour la puissance quatrième, on élève ce résultat au carré :

$(1 + i)^4 = \left[(1 + i)^2 \right]^2 = (2i)^2 = 4i^2 = -4$, un réel négatif. Cette méthode évite un développement de degré 4. On en déduit aussi $(1 + i)^8 = (-4)^2 = 16$.

Réponse. $(1 + i)^2 = 2i$ et $(1 + i)^4 = -4$.

Correction de l'exercice 13 - Réel ou imaginaire pur ?

Pour z_1 : c'est le produit de $2 + 3i$ par son conjugué, donc

$$z_1 = 2^2 + 3^2 = 13$$

un nombre **réel**.

Pour z_2 : on supprime les parenthèses, $3 + i - 3 + 4i = 5i$. La partie réelle est nulle : z_2 est un **imaginaire pur**.

Ce sont deux cas d'une règle générale : $z\bar{z}$ et $z + \bar{z} = 2a$ sont toujours réels, $z - \bar{z} = 2ib$ toujours imaginaire pur. Par exemple, pour $z = 3 + i$, $z - \bar{z} = 2i$.

Réponse. $z_1 = 13$ est réel · $z_2 = 5i$ est imaginaire pur.

Correction de l'exercice 14 - Un calcul enchaîné

Le numérateur : $(1 + i)(2 - i) = 2 - i + 2i - i^2 = 3 + i$.

La division : on multiplie en haut et en bas par $1 + i$, conjugué du dénominateur, qui devient $1^2 + 1^2 = 2$. Le numérateur devient $(3 + i)(1 + i) = 3 + 3i + i - 1 = 2 + 4i$:

$$z = \frac{2 + 4i}{2} = 1 + 2i$$

Vérification : $(1 + 2i)(1 - i) = 1 - i + 2i + 2 = 3 + i$, le numérateur trouvé à la première étape.

Réponse. $z = 1 + 2i$.

Correction de l'exercice 15 - Une somme de quotients

Premier terme : on multiplie en haut et en bas par $-i$, et $i \times (-i) = -i^2 = 1$, donc $\frac{1}{i} = -i$.

Second terme : avec le conjugué $1 - i$, $\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2} = 0,5 - 0,5i$.

On additionne les parties réelles ($0 + 0,5$) et les parties imaginaires ($-1 - 0,5$) :

$$\frac{1}{i} + \frac{1}{1+i} = 0,5 - 1,5i = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$$

La relation $\frac{1}{i} = -i$ se vérifie directement : $i \times (-i) = 1$.

Réponse. $\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : un calcul complet

a) $z_1 + z_2 = (3 + 1) + (2 - 1)i = 4 + i$, et $z_1 z_2 = (3 + 2i)(1 - i) = 3 - 3i + 2i - 2i^2 = 5 - i$.

b) On multiplie par le conjugué $1 + i$ du dénominateur, qui devient 2 :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(3 + 2i)(1 + i)}{2} = \frac{3 + 5i - 2}{2} = \frac{1 + 5i}{2} = 0,5 + 2,5i$$

c) $z_1 \overline{z_1} = 3^2 + 2^2 = 13$ et $z_2 \overline{z_2} = 1^2 + 1^2 = 2$: ce sont les carrés des modules.

d) $z_2 z = z_1$ donne $z = \frac{z_1}{z_2} = 0,5 + 2,5i$, calculé au b). **Vérification** :

$$(0,5 + 2,5i)(1 - i) = 0,5 + 2i + 2,5 = 3 + 2i = z_1.$$

Réponse. a) $4 + i$ et $5 - i$ · b) $0,5 + 2,5i$ · c) 13 et 2 · d) $z = 0,5 + 2,5i$.