

Plaquette 1 - Forme algébrique, module et forme trigonométrique

Nombres complexes — Première STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules du cours.

- Un nombre complexe s'écrit $z = a + ib$ avec a et b réels et $i^2 = -1$. $a = \text{Re}(z)$ est la partie réelle, $b = \text{Im}(z)$ la partie imaginaire.
- **Égalité** : $a + ib = a' + ib'$ si et seulement si $a = a'$ **et** $b = b'$.
- **Conjugué** : $\bar{z} = a - ib$. On a $z \times \bar{z} = a^2 + b^2$, qui est un nombre **réel positif**.
- **Module** : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$; c'est la distance de l'origine au point image $M(a; b)$.
- **Quotient** : on multiplie numérateur et dénominateur par le **conjugué** du dénominateur.
- **Argument** θ : un angle tel que

$$\cos \theta = \frac{a}{|z|} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{b}{|z|}$$

- **Forme trigonométrique** : $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$.
- Propriétés du module : $|zz'| = |z| \times |z'|$ et $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$.
- En électricité, l'**impédance complexe** d'un circuit RL série est $Z = R + iL\omega$; son module $|Z|$ est l'impédance en ohms et son argument le déphasage.

Correction de l'exercice 1 - Parties réelle et imaginaire

On identifie la forme $a + ib$.

- a) $\text{Re}(z_1) = 3$ et $\text{Im}(z_1) = -5$.
- b) $z_2 = 0 - 2i$: $\text{Re} = 0$ et $\text{Im} = -2$. C'est un **imaginaire pur**.
- c) $z_3 = 7 + 0i$: $\text{Re} = 7$ et $\text{Im} = 0$. C'est un nombre **réel**.
- d) $\text{Re}(z_4) = \frac{1}{2}$ et $\text{Im}(z_4) = 1$.

Piège. La partie imaginaire est un nombre **réel** : c'est -5 , et non $-5i$.

Réponse. a) 3 et -5 · b) 0 et -2 · c) 7 et 0 · d) $\frac{1}{2}$ et 1.

Correction de l'exercice 2 - Somme et différence

On additionne séparément les parties réelles et les parties imaginaires.

- $z + z' = (4 - 1) + (3 + 5)i = 3 + 8i$.
- $z - z' = (4 + 1) + (3 - 5)i = 5 - 2i$.
- $2z = 8 + 6i$ et $3z' = -3 + 15i$, donc $2z + 3z' = 5 + 21i$.
- Dans $z - z'$, le signe moins porte sur les **deux** parties de z' : $-(-1 + 5i) = 1 - 5i$. N'en changer qu'un est l'erreur classique.

Réponse. $3 + 8i$; $5 - 2i$; $5 + 21i$.

Correction de l'exercice 3 - Produit et puissance de i

On développe comme avec des réels, puis on remplace i^2 par -1 .

a) $(2 + i)(3 - 4i) = 6 - 8i + 3i - 4i^2 = 6 - 5i + 4 = 10 - 5i$.

b) $(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$.

c) $i^3 = i^2 \times i = -i$ et $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$.

À retenir. Les puissances de i se répètent avec la période 4 : $i, -1, -i, 1$, puis de nouveau $i...$

Réponse. a) $10 - 5i$ · b) $2i$ · c) $i^3 = -i$ et $i^4 = 1$.

Correction de l'exercice 4 - Conjugué et produit remarquable

— a) On change le signe de la partie imaginaire : $\bar{z} = 5 + 2i$.

— b) Formule du cours : $z\bar{z} = a^2 + b^2 = 25 + 4 = 29$.

— Vérification par le calcul : $(5 - 2i)(5 + 2i) = 25 + 10i - 10i - 4i^2 = 25 + 4 = 29$.

— c) $z + \bar{z} = (5 - 2i) + (5 + 2i) = 10 = 2 \operatorname{Re}(z)$.

— À retenir : $z\bar{z}$ et $z + \bar{z}$ sont toujours des nombres **réels**.

Réponse. a) $5 + 2i$ · b) 29 · c) 10 .

Correction de l'exercice 5 - Quotient de deux complexes

Méthode du cours : on multiplie par le **conjugué du dénominateur**.

$$Z = \frac{(3 + i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)}$$

— Dénominateur : $(2 - i)(2 + i) = 4 + 1 = 5$ (réel).

— Numérateur : $(3 + i)(2 + i) = 6 + 3i + 2i + i^2 = 6 + 5i - 1 = 5 + 5i$.

— Donc $Z = \frac{5 + 5i}{5} = 1 + i$.

— Vérification : $(1 + i)(2 - i) = 2 - i + 2i + 1 = 3 + i$. Correct.

Réponse. $Z = 1 + i$.

Correction de l'exercice 6 - Module d'un complexe

Formule du cours : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

— a) $|z_1| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$.

— b) $|z_2| = \sqrt{25 + 0} = 5$: pour un réel, le module est sa valeur absolue.

— c) $|z_3| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$.

— Interprétation géométrique : le module est la **distance** de l'origine au point image.

Réponse. a) 5 · b) 5 · c) $\sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 7 - Points images

Le point image de $a + ib$ a pour coordonnées $(a ; b)$.

— $z_1 = 2 + 3i$: point $M_1(2 ; 3)$.

— $z_2 = -1 + i$: point $M_2(-1 ; 1)$.

— $z_3 = 0 - 2i$: point $M_3(0 ; -2)$, sur l'axe des imaginaires.

— $z_4 = \bar{z}_1 = 2 - 3i$: point $M_4(2 ; -3)$.

— Remarque : M_4 est le **symétrique** de M_1 par rapport à l'axe des réels. C'est toujours le cas pour un conjugué.

Réponse. $(2; 3); (-1; 1); (0; -2); (2; -3)$.

Correction de l'exercice 8 - Argument et forme trigonométrique

a) $|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

b) On cherche θ tel que $\cos \theta = \frac{a}{|z|}$ et $\sin \theta = \frac{b}{|z|}$:

— $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

— L'angle qui vérifie les deux est $\theta = \frac{\pi}{4}$.

c) Forme trigonométrique :

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

— Contrôle : $\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$ pour chaque partie, ce qui redonne $1 + i$.

Réponse. a) $\sqrt{2}$ · b) $\frac{\pi}{4}$ · c) $z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$.

Correction de l'exercice 9 - De la forme trigonométrique à la forme algébrique

On remplace par les valeurs remarquables : $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ et $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$z = 4 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 + 2i\sqrt{3}$$

— Contrôle du module : $|z| = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$, ce qui correspond bien au r de départ.

Réponse. $z = 2 + 2i\sqrt{3}$.

Correction de l'exercice 10 - Module d'un produit

a) $|z| = \sqrt{9+16} = 5$ et $|z'| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

b) $zz' = (3+4i)(1-i) = 3 - 3i + 4i - 4i^2 = 3 + i + 4 = 7 + i$.

— $|zz'| = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

— Or $|z| \times |z'| = 5 \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$: la propriété est bien vérifiée.

— Intérêt pratique : pour calculer le module d'un produit, il est inutile de développer le produit.

Réponse. a) 5 et $\sqrt{2}$ · b) $zz' = 7 + i$, $|zz'| = 5\sqrt{2} = |z| \times |z'|$.

Correction de l'exercice 11 - Problème : impédance d'un circuit RL

a) $L\omega = 0,1 \times 400 = 40 \, \Omega$, donc

$$Z = 30 + 40i$$

b) Module : $|Z| = \sqrt{30^2 + 40^2} = \sqrt{900 + 1600} = \sqrt{2500} = 50,0 \, \Omega$.

c) Argument : $\cos \theta = \frac{30}{50} = 0,6$ et $\sin \theta = \frac{40}{50} = 0,8$ (les deux positifs, l'angle est dans le premier quadrant).

- $\theta = \arccos(0,6) \approx 53,1^\circ$.
- Interprétation : la tension est en avance de $53,1^\circ$ sur le courant, comportement typique d'un circuit inductif.

Réponse. a) $Z = 30 + 40i$ · b) $|Z| = 50,0 \Omega$ · c) $\theta \approx 53,1^\circ$.

Correction de l'exercice 12 - Distance entre deux points images

La distance entre deux points images est le module de la différence de leurs affixes :

$$AB = |z_B - z_A| = |(4 - 1) + (-2 - 2)i| = |3 - 4i| = \sqrt{9 + 16} = 5$$

- **Contrôle par les coordonnées :** $A(1; 2)$ et $B(4; -2)$ donnent $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.
- L'ordre de la soustraction n'a pas d'importance : $|z_A - z_B| = |-3 + 4i| = 5$ aussi.

Réponse. $AB = 5$.

Correction de l'exercice 13 - Multiplier par i

On développe avec $i^2 = -1$: $iz = i(2 + i) = 2i + i^2 = -1 + 2i$.

$$|z| = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5} \quad |iz| = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

- Les modules sont égaux, car $|i| = 1$.
- Le point $(2; 1)$ devient $(-1; 2)$: multiplier par i fait tourner le point image d'un quart de tour (90°) autour de O , dans le sens direct. L'argument augmente de $\frac{\pi}{2}$, l'argument de i .

Réponse. $iz = -1 + 2i$; même module $\sqrt{5}$; rotation d'un quart de tour autour de O .

Correction de l'exercice 14 - Points d'un cercle

Un point image est sur ce cercle si sa distance à O , c'est-à-dire le module, vaut 5.

$$|3 + 4i| = 5 \quad |-5| = 5 \quad |4 - 3i| = 5 \quad |2 + 2i| = \sqrt{8} \approx 2,83$$

- Les points images de z_1, z_2 et z_3 sont sur le cercle.
- Celui de z_4 est à l'intérieur, puisque $2,83 < 5$.

Réponse. z_1, z_2 et z_3 ; z_4 est à l'intérieur du cercle.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : calculs enchaînés

a) $|z| = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

b) $\cos \theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

- Cosinus positif et sinus négatif : l'angle est dans le quatrième quadrant, $\theta = -\frac{\pi}{4}$.

c) Forme trigonométrique : $z = 2\sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)$.

- Pour $\frac{1}{z}$, on multiplie par le conjugué :

$$\frac{1}{2 - 2i} = \frac{2 + 2i}{(2 - 2i)(2 + 2i)} = \frac{2 + 2i}{4 + 4} = \frac{2 + 2i}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$$

- Contrôle du module : $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0,354$, et $\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Cohérent.

Réponse. a) $2\sqrt{2}$ · b) $-\frac{\pi}{4}$ · c) $\frac{1}{z} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$.