

Plaquette 4 - Forme trigonométrique : module et argument

Nombres complexes — Première STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Forme trigonométrique. Pour $z \neq 0$:

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad \text{avec} \quad r = |z|$$

- r est le **module**, toujours **strictement positif** ici.
- θ est un **argument** de z , noté $\arg(z)$, défini à 2π près.

Trouver l'argument. On calcule d'abord r , puis on cherche l'angle qui vérifie **les deux** égalités :

$$\cos \theta = \frac{a}{r} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{b}{r}$$

Position du point image	Argument
$z = r$ (réel positif)	0
$z = -r$ (réel négatif)	π
$z = ri$ (imaginaire pur positif)	$\frac{\pi}{2}$
$z = -ri$	$-\frac{\pi}{2}$

Passer de la forme trigonométrique à la forme algébrique : on développe, avec les valeurs remarquables de cos et sin.

Produits et quotients.

$$|zz'| = |z||z'| \quad \text{et} \quad \arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$$

$$\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$$

- **Conjugué** : $|\bar{z}| = |z|$ et $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$.
- **Multiplier par i** revient à **tourner** le point image d'un quart de tour dans le sens direct.

⚠ Le cosinus seul ne suffit pas à déterminer l'argument : deux angles opposés ont le même cosinus. Il faut **toujours** regarder aussi le sinus, ou le quadrant du point image.

Correction de l'exercice 1 - Un premier argument

On calcule le module, puis on cherche l'angle θ dont le cosinus vaut $\frac{a}{r}$ et le sinus $\frac{b}{r}$.

Le module vaut $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, et $\cos \theta = \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. L'angle remarquable correspondant est $\frac{\pi}{4}$, cohérent avec un point du premier quadrant ($a > 0$, $b > 0$) :

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

Vérification : $\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$ pour la partie réelle comme pour la partie imaginaire.

Réponse. $z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$.

Correction de l'exercice 2 - Un point du deuxième quadrant

Le module vaut $\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. On cherche θ avec $\cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$: cosinus négatif et sinus positif, le point est dans le **deuxième quadrant**, et $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

Retenir $-\frac{\pi}{4}$ serait une erreur : ce cosinus convient au signe près, mais le sinus serait négatif. Par rapport à $1+i$, le module est le même et l'argument augmente de $\frac{\pi}{2}$: en effet, $-1+i = i(1+i)$, un quart de tour.

Réponse. $z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$.

Correction de l'exercice 3 - Avec une racine

Le module vaut $r = \sqrt{3+1} = 2$. Le cosinus et le sinus de l'argument sont

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \sin \theta = \frac{1}{2}$$

ce qui donne la valeur remarquable $\theta = \frac{\pi}{6}$, soit 30° . Donc $z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$.

Vérification : $2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ et $2 \times \frac{1}{2} = 1$. Le point image est dans le premier quadrant, à 30° au-dessus de l'axe des réels.

Réponse. $z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$.

Correction de l'exercice 4 - Des cas particuliers

Pour les points situés sur les axes, on lit directement le module (la distance à O) et l'argument (la direction).

- $z_1 = 5$: point sur l'axe des réels, à droite ; module 5, argument 0.
- $z_2 = -3$: point sur l'axe des réels, à gauche ; module 3, argument π , d'où $-3 = 3(\cos \pi + i \sin \pi)$.
- $z_3 = -2i$: point sur l'axe vertical, en bas ; module 2, argument $-\frac{\pi}{2}$ (ou $\frac{3\pi}{2}$, à 2π près).

$$|-3| = 3 \quad \arg(-3) = \pi$$

Un module est toujours positif : écrire « module -3 » est une erreur ; le signe est porté par l'argument.

Réponse. 5 et 0 · 3 et π · 2 et $-\frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 5 - De la forme trigonométrique à l'algébrique

On remplace le cosinus et le sinus par leurs valeurs remarquables, $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ et $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, puis on développe :

$$z = 4 \times \frac{1}{2} + i \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 + 2i\sqrt{3} \approx 2 + 3,46i$$

Contrôle du module : $\sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = 4$, conforme à la donnée. Le point est dans le premier quadrant, à 60° de l'axe des réels.

Réponse. $z = 2 + 2i\sqrt{3} \approx 2 + 3,46i$.

Correction de l'exercice 6 - Avec un argument négatif

Le cosinus est pair et le sinus impair : $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Donc

$$z = 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2}i = 3\sqrt{2} - 3i\sqrt{2} \approx 4,24 - 4,24i$$

Le point est dans le quatrième quadrant, conformément à un argument négatif. **Contrôle du module :** $\sqrt{18 + 18} = \sqrt{36} = 6$.

Réponse. $z = 3\sqrt{2} - 3i\sqrt{2} \approx 4,24 - 4,24i$.

Correction de l'exercice 7 - Un argument de $2\pi/3$

Le module vaut $r = \sqrt{(-3)^2 + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 + 27} = 6$. On en déduit

$$\cos \theta = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2} \quad \sin \theta = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Cosinus négatif, sinus positif : deuxième quadrant, et l'on reconnaît $\theta = \frac{2\pi}{3}$, soit 120° .

Donc $z = 6\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$.

Vérification : $6 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -3$ et $6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.

Réponse. $z = 6\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$.

Correction de l'exercice 8 - Produit sous forme trigonométrique

Sous forme trigonométrique, le produit se calcule sans développer : les modules se **multiplient** et les arguments s'**additionnent**.

Module : $2 \times 3 = 6$. Argument : $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{12} + \frac{3\pi}{12} = \frac{5\pi}{12}$, soit $30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$.

$$zz' = 6\left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12}\right)$$

Sous forme algébrique, le même calcul demanderait quatre produits et ferait apparaître des valeurs non remarquables : c'est tout l'intérêt de la forme trigonométrique pour les produits.

Réponse. $zz' = 6\left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12}\right)$.

Correction de l'exercice 9 - Quotient sous forme trigonométrique

Pour un quotient, les modules se **divisent** et les arguments se **soustraient**, dans l'ordre numérateur moins dénominateur.

Module : $\frac{3}{2} = 1,5$. Argument : $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{12} - \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$, soit 15° .

$$\frac{z}{z'} = 1,5\left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}\right)$$

L'ordre compte : $\frac{z}{z'}$ aurait pour module $\frac{2}{3}$ et pour argument $-\frac{\pi}{12}$. **Contrôle :** le produit

$\frac{z'}{z}$ a pour module 1 et pour argument 0.

Réponse. $\frac{z'}{z} = 1,5 \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$.

Correction de l'exercice 10 - Multiplier par i

a) $iz = i(3 + 2i) = 3i + 2i^2 = -2 + 3i$.

b) Les modules sont égaux : $|z| = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$ et $|iz| = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$. C'est normal, puisque $|i| = 1$.

$$|iz| = |i| \times |z| = |z| \quad \arg(iz) = \arg(z) + \frac{\pi}{2}$$

L'argument de i vaut $\frac{\pi}{2}$: multiplier par i fait **tourner** le point image d'un quart de tour dans le sens direct, autour de O . On le voit sur les coordonnées : $(3; 2)$ devient $(-2; 3)$. Quatre multiplications par i ramènent au point de départ.

Réponse. a) $iz = -2 + 3i$ · b) même module : c'est une rotation d'un quart de tour.

Correction de l'exercice 11 - Argument du conjugué

Le conjugué a le **même module** et un argument **opposé** :

$$\bar{z} = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right)$$

Avec $\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2}$ et $\sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, la forme algébrique est $\bar{z} = 1 - i\sqrt{3}$.

Contrôle : $z = 2 \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 + i\sqrt{3}$, dont le conjugué est bien $1 - i\sqrt{3}$.

Géométriquement, les deux points sont symétriques par rapport à l'axe des réels.

Réponse. $\bar{z} = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right) = 1 - i\sqrt{3}$.

Correction de l'exercice 12 - Le carré d'un complexe

a) $z^2 = z \times z$: le module est élevé au carré, $2 \times 2 = 4$, et l'argument doublé, $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$:

$$z^2 = 4 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

b) Avec $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ et $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, on obtient $z^2 = 2 + 2i\sqrt{3}$.

Contrôle par la forme algébrique : $z = \sqrt{3} + i$, et $(\sqrt{3} + i)^2 = 3 + 2i\sqrt{3} - 1 = 2 + 2i\sqrt{3}$. Les deux méthodes concordent.

Réponse. a) $4 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$ · b) $2 + 2i\sqrt{3}$.

Correction de l'exercice 13 - Un quatrième quadrant

Le point image de $z = 5 - 5i$ est $(5; -5)$, dans le quatrième quadrant. Son module vaut $\sqrt{25 + 25} = 5\sqrt{2} \approx 7,07$, et

$$\cos \theta = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \sin \theta = \frac{-5}{5\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

d'où $\theta = -\frac{\pi}{4}$ et $z = 5\sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)$.

Vérification : $5\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 5$. L'argument $\frac{7\pi}{4}$ convient aussi, puisqu'un argument est défini à 2π près.

Réponse. $z = 5\sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right)$.

Correction de l'exercice 14 - Un signal écrit en complexe

a) Le module donne l'amplitude, 12 V, et l'argument la phase à l'origine, $\frac{\pi}{3}$ rad, soit 60° .

b) À 50 Hz, la pulsation vaut $\omega = 2\pi \times 50 = 100\pi$ rad/s, et le signal s'écrit $u(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$:

$$u(t) = 12 \cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$$

En $t = 0$, $u(0) = 12 \times \frac{1}{2} = 6$ V : c'est la partie réelle du complexe U . La valeur efficace vaut $\frac{12}{\sqrt{2}} \approx 8,49$ V. L'intérêt de cette représentation est qu'additionner deux signaux de même fréquence revient à additionner deux complexes.

Réponse. a) 12 V et $\frac{\pi}{3}$ · b) $u(t) = 12 \cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$.

Correction de l'exercice 15 - Deux signaux à additionner

a) On additionne les complexes : $U_1 + U_2 = 8 + 6i$, de module

$$|8 + 6i| = \sqrt{64 + 36} = 10 \text{ V}$$

L'amplitude résultante vaut 10 V, et non $8 + 6 = 14$ V : les deux signaux sont déphasés d'un quart de période ($\frac{\pi}{2}$), leurs maximums ne coïncident pas.

b) La phase vérifie $\cos \varphi = \frac{8}{10} = 0,8$ et $\sin \varphi = 0,6$ (premier quadrant), d'où $\varphi \approx 36,87^\circ$, soit environ 0,644 rad. Elle est bien comprise entre la phase de U_1 (0°) et celle de U_2 (90°), plus proche de U_1 , le plus fort des deux.

Réponse. a) $8 + 6i$, de module 10 V · b) environ $36,87^\circ$.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : aller-retour entre les deux formes

a) $|z_1| = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$ et $\cos \theta_1 = \sin \theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, d'où $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$. Pour z_2 : $|z_2| = 2$,

$\cos \theta_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin \theta_2 = \frac{1}{2}$, d'où $\theta_2 = \frac{5\pi}{6}$.

b) Le module du produit vaut $2\sqrt{2} \times 2 = 4\sqrt{2}$, et un argument $\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{6} = \frac{13\pi}{12}$, soit aussi $\frac{13\pi}{12} - 2\pi = -\frac{11\pi}{12}$.

c) $z_1 z_2 = (2 + 2i)(-\sqrt{3} + i) = -2\sqrt{3} + 2i - 2i\sqrt{3} - 2 = (-2\sqrt{3} - 2) + (2 - 2\sqrt{3})i$.

d) On identifie les deux écritures : $4\sqrt{2} \cos\left(-\frac{11\pi}{12}\right) = -2\sqrt{3} - 2$ et

$4\sqrt{2} \sin\left(-\frac{11\pi}{12}\right) = 2 - 2\sqrt{3}$. Par parité du cosinus et imparité du sinus :

$$\cos \frac{11\pi}{12} = \frac{-2\sqrt{3} - 2}{4\sqrt{2}} \approx -0,966 \quad \sin \frac{11\pi}{12} = \frac{2\sqrt{3} - 2}{4\sqrt{2}} \approx 0,259$$

Contrôles : $0,966^2 + 0,259^2 \approx 1$, et $\frac{11\pi}{12} = 165^\circ$ est dans le deuxième quadrant (cosinus négatif, sinus positif).

Réponse. a) $2\sqrt{2}$ et $\frac{\pi}{4}$; 2 et $\frac{5\pi}{6}$ · b) $4\sqrt{2}$ et $\frac{13\pi}{12}$ · c) $(-2\sqrt{3} - 2) + (2 - 2\sqrt{3})i$ · d)
 $\cos \frac{11\pi}{12} \approx -0,966$ et $\sin \frac{11\pi}{12} \approx 0,259$.