

Plaquette 5 - Les complexes en électricité : impédances

Nombres complexes — Première STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Impédance complexe. Pour un dipôle en régime sinusoïdal de pulsation ω :

Dipôle	Impédance complexe Z
résistance R	R
bobine d'inductance L	$iL\omega$
condensateur de capacité C	$-\frac{i}{C\omega}$

- **Circuit RL série** : $Z = R + iL\omega$.
- **Circuit RC série** : $Z = R - \frac{i}{C\omega}$.
- **Circuit RLC série** : $Z = R + i\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$.
- **En série**, les impédances s'**additionnent** : $Z = Z_1 + Z_2$.

Ce que disent le module et l'argument.

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2} \quad \text{et} \quad \varphi = \arg(Z)$$

- $|Z|$ est l'**impédance** en ohms : $U_{\text{eff}} = |Z| \times I_{\text{eff}}$.
- φ est le **déphasage** de la tension par rapport au courant.
- X est la **réactance** : positive (circuit **inductif**), négative (circuit **capacitif**), nulle (circuit **résistif**).

Puissance active.

$$P = U_{\text{eff}} \times I_{\text{eff}} \times \cos \varphi \quad \text{avec} \quad \cos \varphi = \frac{R}{|Z|}$$

Résonance. Elle a lieu quand $L\omega = \frac{1}{C\omega}$: l'impédance devient réelle, $Z = R$, le déphasage est nul et le courant est **maximal**. La pulsation propre vaut

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

⚠ Ne jamais additionner directement les modules : $|Z_1 + Z_2| \neq |Z_1| + |Z_2|$ en général. On additionne les **complexes**, puis on prend le module.

Correction de l'exercice 1 - Lire une impédance

L'impédance complexe $Z = R + iX$ se lit directement : la partie réelle est la **résistance**, $R = 40 \, \Omega$, et la partie imaginaire la **réactance**, $X = 30 \, \Omega$. Elle est positive : le circuit est **inductif**.

L'impédance est le module, $|Z| = \sqrt{1600 + 900} = 50 \, \Omega$, et le déphasage est un argument de Z :

$$\cos \varphi = \frac{R}{|Z|} = \frac{40}{50} = 0,8 \quad \varphi \approx 36,87^\circ$$

Le déphasage est positif : la tension est en avance sur le courant, comme toujours dans

un circuit inductif.

Réponse. $R = 40 \, \Omega$, $X = 30 \, \Omega$, $|Z| = 50 \, \Omega$, $\varphi \approx 36,87^\circ$.

Correction de l'exercice 2 - Impédance d'un circuit RL

a) La pulsation vaut $\omega = 2\pi \times 50 = 100\pi \approx 314,16 \text{ rad/s}$, donc $L\omega = 0,1 \times 314,16 \approx 31,42 \, \Omega$. C'est une grandeur homogène à une résistance.

b) Pour un circuit RL série, $Z = R + iL\omega$:

$$Z = 30 + 31,42i \quad |Z| = \sqrt{900 + 987,2} \approx 43,44 \, \Omega$$

L'impédance dépasse la résistance seule : la bobine s'oppose elle aussi au passage du courant alternatif. Ici, résistance et réactance sont presque égales, le déphasage est proche de 45° (environ $46,3^\circ$).

Réponse. a) $L\omega \approx 31,42 \, \Omega$ · b) $Z = 30 + 31,42i$ et $|Z| \approx 43,44 \, \Omega$.

Correction de l'exercice 3 - Impédance d'un circuit RC

a) $C = 10 \, \mu\text{F} = 10^{-5} \text{ F}$ et $\omega = 100\pi \approx 314,16 \text{ rad/s}$, donc $C\omega \approx 3,1416 \times 10^{-3}$ et $\frac{1}{C\omega} \approx 318,31 \, \Omega$.

b) Pour un circuit RC série, la réactance est **négative** :

$$Z = R - \frac{i}{C\omega} = 200 - 318,31i \quad |Z| = \sqrt{40\,000 + 101\,321} \approx 375,93 \, \Omega$$

La partie imaginaire négative indique un circuit **capacitif** : la tension est en retard sur le courant, d'un déphasage d'environ $-57,86^\circ$ (son cosinus vaut $\frac{200}{375,93} \approx 0,532$).

Réponse. a) environ $318,31 \, \Omega$ · b) $Z = 200 - 318,31i$, $|Z| \approx 375,93 \, \Omega$, circuit capacitif.

Correction de l'exercice 4 - Calculer le courant

L'intensité efficace s'obtient en divisant la tension efficace par le **module** de l'impédance, $|Z| = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50 \, \Omega$:

$$I_{\text{eff}} = \frac{U_{\text{eff}}}{|Z|} = \frac{230}{50} = 4,6 \text{ A}$$

Diviser par la seule résistance $R = 40 \, \Omega$ donnerait $5,75 \text{ A}$: ce serait oublier que la bobine s'oppose aussi au courant. Plus le module de l'impédance est grand, plus le courant est faible.

Réponse. $I_{\text{eff}} = 4,6 \text{ A}$.

Correction de l'exercice 5 - Nature d'un circuit

La nature d'un circuit se lit sur le **signe** de la partie imaginaire de son impédance, la réactance.

- $Z_1 = 25 + 18i$: réactance positive, circuit **inductif**, tension en avance sur le courant.
- $Z_2 = 60 - 45i$: réactance négative, circuit **capacitif**, tension en retard ; son module vaut $\sqrt{3\,600 + 2\,025} = 75 \, \Omega$.
- $Z_3 = 80$: réactance nulle, circuit **purement résistif**, tension et courant en phase.

$$X > 0 : \text{inductif} \quad X < 0 : \text{capacitif} \quad X = 0 : \text{résistif}$$

Pour Z_3 , le facteur de puissance vaut $\cos 0 = 1$, le meilleur possible.

Réponse. Z_1 inductif · Z_2 capacitif · Z_3 résistif.

Correction de l'exercice 6 - Facteur de puissance et puissance active

a) Le facteur de puissance est le cosinus du déphasage, égal au rapport de la résistance au module de l'impédance :

$$\cos \varphi = \frac{R}{|Z|} = \frac{40}{50} = 0,8$$

soit $\varphi \approx 36,87^\circ$.

b) L'intensité vaut $\frac{230}{50} = 4,6$ A, et la puissance active

$$P = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi = 230 \times 4,6 \times 0,8 = 1\,058 \times 0,8 = 846,4 \text{ W.}$$

Seconde méthode : seule la résistance consomme de l'énergie,

$$P = R I_{\text{eff}}^2 = 40 \times 4,6^2 = 40 \times 21,16 = 846,4 \text{ W. Les deux méthodes concordent.}$$

Réponse. a) $\cos \varphi = 0,8$ · b) $P = 846,4 \text{ W}$.

Correction de l'exercice 7 - Deux impédances en série

a) En série, les impédances complexes s'additionnent :

$$Z = (30 + 10) + (40 - 10)i = 40 + 30i \quad |Z| = 50 \, \Omega$$

b) $|Z_1| = \sqrt{900 + 1\,600} = 50 \, \Omega$ et $|Z_2| = \sqrt{200} \approx 14,14 \, \Omega$, de somme environ 64,14 Ω , différente de 50 Ω .

Les modules ne s'additionnent pas : Z_1 est inductif, Z_2 capacitif, et la réactance de l'un compense en partie celle de l'autre ($40 - 10 = 30$). La règle est d'additionner les complexes, puis de prendre le module.

Réponse. a) $Z = 40 + 30i$, de module 50 Ω · b) la somme des modules vaut environ 64,14 Ω : ce n'est pas la même chose.

Correction de l'exercice 8 - Comparer deux circuits

Les deux impédances ont le même module : $|Z_1| = \sqrt{3\,600 + 6\,400} = 100 \, \Omega$ et $|Z_2| = 100 \, \Omega$. Sous 230 V, les courants sont donc identiques, $\frac{230}{100} = 2,3$ A.

Les facteurs de puissance diffèrent : $\cos \varphi_1 = \frac{60}{100} = 0,6$ et $\cos \varphi_2 = 1$. D'où les puissances actives

$$P_1 = 230 \times 2,3 \times 0,6 = 317,4 \text{ W} \quad P_2 = 230 \times 2,3 \times 1 = 529 \text{ W}$$

À courant égal, le circuit inductif fournit bien moins de puissance utile : le réseau transporte le même courant pour un service moindre, d'où l'intérêt de relever le facteur de puissance.

Réponse. Même courant de 2,3 A, mais 317,4 W contre 529 W.

Correction de l'exercice 9 - Chercher la résonance

À la résonance, les réactances de la bobine et du condensateur s'annulent :

$$L\omega = \frac{1}{C\omega} \Leftrightarrow LC\omega^2 = 1 \Leftrightarrow \omega^2 = \frac{1}{LC}$$

Ici $LC = 0,1 \times 10^{-5} = 10^{-6}$, donc $\omega_0^2 = 10^6$ et $\omega_0 = 1\,000$ rad/s. La fréquence vaut $f_0 = \frac{1\,000}{2\pi} \approx 159,15 \text{ Hz}$.

Vérification : $L\omega_0 = 0,1 \times 1\,000 = 100 \, \Omega$ et $\frac{1}{C\omega_0} = \frac{1}{10^{-5} \times 1\,000} = 100 \, \Omega$: les deux

réactances sont bien égales.

Réponse. $\omega_0 = 1\,000$ rad/s, soit $f_0 \approx 159,15$ Hz.

Correction de l'exercice 10 - À la résonance

a) Pour un circuit RLC série, $Z = R + i\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$. À la résonance, la parenthèse est nulle :

$$Z = 30 \quad |Z| = 30 \, \Omega$$

Le circuit se comporte comme une résistance pure.

b) Le courant vaut $\frac{230}{30} \approx 7,67$ A, en phase avec la tension ($\varphi = 0$, facteur de puissance 1) ; la puissance active atteint environ $230 \times 7,67 \approx 1\,764$ W.

Hors résonance, par exemple à 50 Hz, $L\omega \approx 31,42 \, \Omega$ et $\frac{1}{C\omega} \approx 318,31 \, \Omega$, donc

$Z \approx 30 - 286,89i$, de module environ $288,5 \, \Omega$: le courant tomberait à 0,80 A environ. À la résonance, le courant est **maximal** : c'est le principe de la sélection d'une fréquence, en radio par exemple.

Réponse. a) $Z = 30$, de module $30 \, \Omega$ · b) environ 7,67 A, déphasage nul.

Correction de l'exercice 11 - Dimensionner une bobine

Un déphasage de 45° signifie que le point image de $Z = R + iL\omega$ est sur la bissectrice du premier quadrant : la partie imaginaire égale la partie réelle.

$$L\omega = R \Leftrightarrow L = \frac{R}{\omega} = \frac{40}{100\pi} \approx \frac{40}{314,16} \approx 0,127 \, \text{H}$$

soit 127 mH. L'impédance vaut alors $Z = 40 + 40i$, de module $40\sqrt{2} \approx 56,57 \, \Omega$, et le facteur de puissance $\frac{40}{56,57} \approx 0,707$: c'est bien $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Réponse. $L \approx 0,127$ H (soit 127 mH).

Correction de l'exercice 12 - Retrouver la résistance

Le module de $Z = R + iX$ vérifie $|Z|^2 = R^2 + X^2$, comme l'hypoténuse d'un triangle rectangle :

$$65^2 = R^2 + 25^2 \Leftrightarrow R^2 = 4\,225 - 625 = 3\,600 \Leftrightarrow R = 60 \, \Omega$$

L'impédance complexe est donc $Z = 60 + 25i$ et le facteur de puissance vaut $\frac{R}{|Z|} = \frac{60}{65} \approx 0,923$, soit un déphasage d'environ $22,62^\circ$. Un facteur supérieur à 0,9 est très correct. **Vérification** : $\sqrt{3\,600 + 625} = \sqrt{4\,225} = 65$.

Réponse. $R = 60 \, \Omega$ et $\cos \varphi \approx 0,923$.

Correction de l'exercice 13 - Effet de la fréquence

La réactance d'une bobine vaut $X = L\omega = 2\pi fL$: elle est **proportionnelle** à la fréquence. En passant de 50 à 100 Hz, elle double : $X = 2 \times 30 = 60 \, \Omega$, tandis que la résistance reste $40 \, \Omega$.

$$Z = 40 + 60i \quad |Z| = \sqrt{1\,600 + 3\,600} = \sqrt{5\,200} \approx 72,11 \, \Omega$$

L'impédance passe de $50 \, \Omega$ à environ $72,11 \, \Omega$: dans un circuit inductif, elle augmente avec la fréquence. Sous 230 V, le courant passe ainsi de 4,6 A à environ 3,19 A.

Réponse. $Z = 40 + 60i$, soit $|Z| \approx 72,11 \, \Omega$.

Correction de l'exercice 14 - Tension aux bornes d'une bobine

a) $|Z| = \sqrt{900 + 1\,600} = 50\ \Omega$, donc la tension d'alimentation vaut
 $U = |Z| \times I = 50 \times 3 = 150\ \text{V}$.

b) Aux bornes de la résistance, $U_R = R \times I = 90\ \text{V}$; aux bornes de la bobine,
 $U_L = L\omega \times I = 40 \times 3 = 120\ \text{V}$.

Leur somme arithmétique, 210 V, ne vaut pas 150 V : les deux tensions sont déphasées de 90° , et elles s'ajoutent comme des complexes, $90 + 120i$, dont le module vaut

$$\sqrt{90^2 + 120^2} = \sqrt{22\,500} = 150\ \text{V}$$

En alternatif, on additionne les tensions en complexes, jamais directement leurs valeurs efficaces.

Réponse. a) 150 V · b) 90 V et 120 V, dont la somme **vectorielle** $\sqrt{90^2 + 120^2} = 150\ \text{V}$.

Correction de l'exercice 15 - Un circuit RLC quelconque

a) La réactance totale est la différence des réactances de la bobine et du condensateur :

$$Z = R + i\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) = 50 + (120 - 60)i = 50 + 60i$$

Elle est positive : la bobine l'emporte, le circuit est **inductif**.

b) $|Z| = \sqrt{2\,500 + 3\,600} = \sqrt{6\,100} \approx 78,10\ \Omega$, et le facteur de puissance vaut
 $\frac{50}{78,10} \approx 0,640$, soit un déphasage d'environ $50,19^\circ$.

Pour l'améliorer, il faut rapprocher $\frac{1}{C\omega}$ de $120\ \Omega$, donc **diminuer** C ; augmenter C ferait baisser $\frac{1}{C\omega}$ et aggraverait le déphasage.

Réponse. a) $Z = 50 + 60i$, circuit inductif · b) $|Z| \approx 78,10\ \Omega$ et $\cos \varphi \approx 0,64$.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : étude complète d'une installation

a) $|Z| = \sqrt{576 + 324} = \sqrt{900} = 30\ \Omega$; $\cos \varphi = \frac{24}{30} = 0,8$, soit $\varphi \approx 36,87^\circ$ (circuit inductif).

b) $I = \frac{230}{30} \approx 7,67\ \text{A}$ et $P = 230 \times 7,67 \times 0,8 \approx 1\,411\ \text{W}$; **contrôle** :
 $RI^2 = 24 \times 7,67^2 \approx 1\,411\ \text{W}$.

c) Le condensateur ajoute une réactance $-18\ \Omega$ qui compense exactement celle de la bobine :

$$Z' = 24 + i(18 - 18) = 24 \quad I' = \frac{230}{24} \approx 9,58\ \text{A} \quad P' \approx 230 \times 9,58 \approx 2\,204\ \text{W}$$

d) Le circuit devient purement résistif : toute la puissance apparente devient utile, et la puissance active augmente d'environ $\frac{2\,204 - 1\,411}{1\,411} \approx 56\%$. Mais le courant augmente aussi, ce qui impose de vérifier la section des conducteurs ; en pratique, on compense plutôt en **parallèle**, ce qui réduit le courant de ligne sans changer la puissance utile.

Réponse. a) $30\ \Omega$, $\cos \varphi = 0,8$, $\varphi \approx 36,87^\circ$ · b) $7,67\ \text{A}$ et environ $1\,411\ \text{W}$ · c) $Z' = 24$, $9,58\ \text{A}$ et environ $2\,204\ \text{W}$ · d) le circuit devient résistif, toute la puissance apparente est utile.