

Plaquette 3 - Module, point image et équations

Nombres complexes — Première STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Point image. Au complexe $z = a + ib$ on associe le point $M(a ; b)$ du plan, appelé **point image** de z . Réciproquement, z est l'**affixe** de M .

Module.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = OM$$

- C'est la **distance** de l'origine au point image : elle est toujours positive ou nulle.
- $|z|^2 = z\bar{z}$.
- $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$.

Distance entre deux points. Si A a pour affixe z_A et B pour affixe z_B :

$$AB = |z_B - z_A|$$

Propriétés du module.

$$|zz'| = |z| \times |z'| \quad \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad |\bar{z}| = |z|$$

Lecture géométrique.

Complexe	Point image
$\bar{z}$	symétrique de M par rapport à l'axe des réels
$-z$	symétrique de M par rapport à l'origine
$ z = r$	M est sur le cercle de centre O et de rayon r

Équations du type $z^2 = -k$ (avec $k > 0$) : elles ont **deux** solutions imaginaires pures,

$$z = i\sqrt{k} \quad \text{ou} \quad z = -i\sqrt{k}$$

Pour une équation du second degré sans solution réelle, on passe par la **forme canonique**, ce qui ramène au cas précédent.

△ Un module n'est jamais négatif, et n'est jamais complexe : c'est un nombre réel positif.

Correction de l'exercice 1 - Trois modules

Le module de $z = a + ib$ est la distance de son point image à l'origine :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- $|3 + 4i| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$.
- $|-5 + 12i| = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$.
- $|2 - 2i| = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2,83$.

Les signes de a et b disparaissent, puisque l'on élève au carré : un module est toujours positif ou nul.

Réponse. 5 ; 13 ; $2\sqrt{2} \approx 2,83$.

Correction de l'exercice 2 - Modules particuliers

On écrit chaque nombre sous la forme $a + ib$ avant d'appliquer $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

- $-6 = -6 + 0i : |-6| = \sqrt{36} = 6$. Pour un réel, le module est la valeur absolue.
- $7i = 0 + 7i : |7i| = \sqrt{49} = 7$.
- $3 - 4i = 3 + 4i$, de module $\sqrt{9 + 16} = 5$.

$$|\bar{z}| = |z|$$

En effet, le point image de $\bar{z}$ est le symétrique de celui de z par rapport à l'axe des réels, et cette symétrie conserve les distances à l'origine.

Réponse. 6 ; 7 ; 5.

Correction de l'exercice 3 - Points images

Le point image de $a + ib$ est le point de coordonnées $(a ; b)$: l'axe horizontal porte les parties réelles, l'axe vertical les parties imaginaires.

- $z_A = 2 + 3i$ donne $A(2 ; 3)$, dans le premier quadrant.
- $z_B = -1 + 2i$ donne $B(-1 ; 2)$, dans le deuxième quadrant.
- $z_C = -2i$ donne $C(0 ; -2)$, sur l'axe des imaginaires, sous l'origine.

Les distances à l'origine sont les modules :

$$OA = \sqrt{13} \quad OB = \sqrt{5} \quad OC = 2$$

Réponse. $A(2 ; 3)$, $B(-1 ; 2)$ et $C(0 ; -2)$.

Correction de l'exercice 4 - Distance entre deux points images

La distance entre deux points images est le module de la différence de leurs affixes :

$$AB = |z_B - z_A| = |(1 - 3) + (4 - 1)i| = |-2 + 3i| = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \approx 3,61$$

Contrôle par les coordonnées : $A(3 ; 1)$ et $B(1 ; 4)$ donnent

$AB = \sqrt{(1 - 3)^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{13}$, le même résultat. L'ordre n'a pas d'importance, $|z_A - z_B| = |2 - 3i| = \sqrt{13}$ aussi.

Réponse. $AB = \sqrt{13} \approx 3,61$.

Correction de l'exercice 5 - Module d'un produit

a) $zz' = (3 + 4i)(1 + i) = 3 + 3i + 4i + 4i^2 = -1 + 7i$, de module $\sqrt{1 + 49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7,07$.

b) $|z| = 5$ et $|z'| = \sqrt{2}$, donc

$$|z| \times |z'| = 5\sqrt{2} = |zz'|$$

La propriété est vérifiée : le module d'un produit est le produit des modules. Elle permet de calculer le module d'un produit sans le développer ; par exemple, $|z^3| = |z|^3 = 125$.

Réponse. a) $zz' = -1 + 7i$, de module $5\sqrt{2}$ · b) $5 \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ ✓

Correction de l'exercice 6 - Module d'un quotient

Le module d'un quotient est le quotient des modules :

$$\left| \frac{3 + 4i}{1 + i} \right| = \frac{|3 + 4i|}{|1 + i|} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \approx 3,54$$

Contrôle par le calcul direct : $\frac{3+4i}{1+i} = \frac{(3+4i)(1-i)}{2} = \frac{7+i}{2}$, de module $\frac{\sqrt{49+1}}{2} = \frac{\sqrt{50}}{2} \approx 3,54$. Les deux méthodes concordent, la première sans aucune division.

Réponse. $\frac{5\sqrt{2}}{2} \approx 3,54$.

Correction de l'exercice 7 - Une équation sans solution réelle

Aucun réel n'a un carré négatif : on cherche des solutions imaginaires pures $z = ib$, avec b réel. Comme $(ib)^2 = i^2 b^2 = -b^2$, l'équation devient $-b^2 = -9$, soit $b^2 = 9$ et $b = 3$ ou $b = -3$:

$$z = 3i \quad \text{ou} \quad z = -3i$$

Vérification : $(3i)^2 = 9i^2 = -9$ et $(-3i)^2 = -9$. Plus généralement, pour $k > 0$, l'équation $z^2 = -k$ a deux solutions, $i\sqrt{k}$ et $-i\sqrt{k}$, conjuguées l'une de l'autre.

Réponse. $z = 3i$ ou $z = -3i$.

Correction de l'exercice 8 - Une équation à ramener

On isole z^2 , puis on reconnaît une équation $z^2 = -k$ avec $k > 0$.

Première équation : $z^2 = -4$, donc $z = 2i$ ou $z = -2i$. **Vérification :** $(2i)^2 + 4 = -4 + 4 = 0$.

Seconde équation : on divise par 2, $z^2 + 25 = 0$, soit $z^2 = -25$:

$$z = 5i \quad \text{ou} \quad z = -5i$$

Vérification : $2 \times (5i)^2 + 50 = -50 + 50 = 0$. Dans les deux cas, les solutions sont conjuguées l'une de l'autre.

Réponse. $\pm 2i$, puis $\pm 5i$.

Correction de l'exercice 9 - Par la forme canonique

On reconnaît dans $z^2 + 2z$ le début du carré $(z+1)^2 = z^2 + 2z + 1$, donc $z^2 + 2z = (z+1)^2 - 1$. L'équation s'écrit

$$(z+1)^2 - 1 + 5 = 0 \Leftrightarrow (z+1)^2 = -4$$

On pose $Z = z + 1$: $Z^2 = -4$ donne $Z = 2i$ ou $Z = -2i$, d'où $z = -1 + 2i$ ou $z = -1 - 2i$.

Vérification : $(-1 + 2i)^2 = 1 - 4i - 4 = -3 - 4i$, puis $-3 - 4i + 2(-1 + 2i) + 5 = 0$. Les deux solutions sont conjuguées, comme toujours pour une équation à coefficients réels.

Réponse. $z = -1 + 2i$ ou $z = -1 - 2i$.

Correction de l'exercice 10 - Une seconde forme canonique

On complète le carré : $z^2 - 6z = (z-3)^2 - 9$, donc l'équation devient

$$(z-3)^2 - 9 + 13 = 0 \Leftrightarrow (z-3)^2 = -4$$

d'où $z - 3 = 2i$ ou $z - 3 = -2i$, soit $z = 3 + 2i$ ou $z = 3 - 2i$.

Vérification : $(3 + 2i)^2 = 9 + 12i - 4 = 5 + 12i$, puis $5 + 12i - 6(3 + 2i) + 13 = 5 + 12i - 18 - 12i + 13 = 0$. On peut aussi développer $(z-3-2i)(z-3+2i) = (z-3)^2 + 4 = z^2 - 6z + 13$.

Réponse. $z = 3 + 2i$ ou $z = 3 - 2i$.

Correction de l'exercice 11 - Un ensemble de points

Le module $|z|$ est la distance OM , et $|z - z_A|$ est la distance AM .

Premier ensemble : $|z| = 3$ signifie $OM = 3$: c'est le **cercle** de centre O et de rayon 3, qui passe par les points d'affixes 3, -3 , $3i$ et $-3i$.

Second ensemble : $|z - 2| = 3$ signifie $AM = 3$, où A est le point d'affixe 2 : c'est le cercle de centre $A(2; 0)$ et de rayon 3. Il passe par les points d'affixes 5, -1 et $2 + 3i$; par exemple, $|5 - 2| = 3$.

$$|z - z_A| = r \Leftrightarrow AM = r$$

Réponse. Le cercle de centre O et de rayon 3, puis celui de centre $A(2; 0)$ et de rayon 3.

Correction de l'exercice 12 - Conjugué et symétrie

a) Le conjugué de $z = 4 - 3i$ est $\bar{z} = 4 + 3i$, donc $M'(4; 3)$. Seule l'ordonnée change de signe : M' est le symétrique de $M(4; -3)$ par rapport à l'axe des réels.

b) Le produit d'un complexe par son conjugué vaut $a^2 + b^2$:

$$z\bar{z} = 4^2 + 3^2 = 25 = |z|^2$$

puisque $|z| = \sqrt{25} = 5$. Cette relation donne le carré du module sans racine carrée. Enfin, $MM' = |\bar{z} - z| = |6i| = 6$, ce que confirme la figure.

Réponse. a) $\bar{z} = 4 + 3i$, soit $M'(4; 3)$ · b) $z\bar{z} = 25 = |z|^2$.

Correction de l'exercice 13 - Module d'une impédance

a) Le module de l'impédance complexe est l'**impédance** du circuit, en ohms :

$$|Z| = \sqrt{40^2 + 30^2} = \sqrt{2500} = 50 \Omega$$

b) On isole l'intensité : $I_{\text{eff}} = \frac{U_{\text{eff}}}{|Z|} = \frac{230}{50} = 4,6 \text{ A}$.

Le module joue le rôle d'une résistance équivalente. La partie réelle, 40Ω , est la résistance ; la partie imaginaire, 30Ω , la réactance. Comme $|Z| = 50 > 40$, la bobine limite davantage le courant que la seule résistance.

Réponse. a) 50Ω · b) $I_{\text{eff}} = 4,6 \text{ A}$.

Correction de l'exercice 14 - Comparer deux modules

L'éloignement à l'origine est mesuré par le module :

$$|z_1| = \sqrt{36 + 64} = 10 \quad |z_2| = \sqrt{81 + 4} = \sqrt{85} \approx 9,22$$

Comme $10 > 9,22$, c'est le point image de z_1 qui est le plus éloigné de l'origine.

Comparer seulement les parties réelles ($|-9| > 6$) aurait conduit à la mauvaise réponse : le module combine les deux coordonnées, comme une distance dans le plan.

Réponse. z_1 , de module 10, contre environ 9,22 pour z_2 .

Correction de l'exercice 15 - Un module à retrouver

On traduit la condition sur le module et on élève au carré, les deux membres étant positifs :

$$\sqrt{16 + b^2} = 5 \Leftrightarrow 16 + b^2 = 25 \Leftrightarrow b^2 = 9$$

d'où $b = 3$ ou $b = -3$: les complexes $4 + 3i$ et $4 - 3i$, conjugués l'un de l'autre.

Géométriquement, ce sont les deux points du cercle de centre O et de rayon 5 d'abscisse 4. Avec $|4 + ib| = 3$, il n'y aurait aucune solution : $16 + b^2 \geq 16 > 9$, le cercle de rayon 3 ne coupe pas la droite d'abscisse 4.

Réponse. $b = 3$ ou $b = -3$.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : un triangle de points images

- a) Les longueurs sont les modules des différences d'affixes : $z_B - z_A = 3 + 4i$ donne $AB = 5$; $z_C - z_A = -4 + 3i$ donne $AC = 5$; $z_C - z_B = -7 - i$ donne $BC = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \approx 7,07$.
 b) $AB = AC = 5$: le triangle est isocèle en A .
 c) On compare les carrés des côtés :

$$AB^2 + AC^2 = 25 + 25 = 50 = BC^2$$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle est rectangle en A ; il est donc rectangle isocèle, d'angles 90° , 45° et 45° .

- d) L'aire vaut la moitié du produit des côtés de l'angle droit : $\frac{5 \times 5}{2} = 12,5$ unités d'aire.

Contrôle : $\overrightarrow{AB}(3; 4)$ et $\overrightarrow{AC}(-4; 3)$ ont un produit scalaire $-12 + 12 = 0$.

Réponse. a) 5, 5 et $5\sqrt{2}$ · b) $AB = AC$ · c) $25 + 25 = 50$ · d) aire = 12,5.