

MATHÉMATIQUES

Nombres complexes

Première STI2D

Nombre complexe • $i^2 = -1$ • Forme algébrique • Conjugué • Plan complexe
Affixe • Module • Argument • Forme trigonométrique • Impédance

Repères du programme

Ce cours suit le **programme de l'enseignement de spécialité physique-chimie et mathématiques, classe de première STI2D** (BO spécial n°8 du 25 juillet 2019), partie mathématiques, « Nombres complexes ». Il couvre :

- forme algébrique $z = a + ib$, partie réelle, partie imaginaire ; somme, produit, quotient ;
- conjugué et ses propriétés ;
- représentation dans un repère orthonormé direct : affixe d'un point, d'un vecteur ;
- module, argument, forme trigonométrique $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$.

La forme exponentielle $re^{i\theta}$ est étudiée en terminale.

Objectif : calculer avec des nombres complexes sous forme algébrique, les représenter dans le plan, et passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique.

Table des matières

1	Forme algébrique	3
2	Conjugué et quotient	3
3	Plan complexe	4
4	Module	4
5	Argument et forme trigonométrique	4
6	Erreurs classiques	5
7	Fiche de synthèse	5
8	Exercices d'application	6
9	Corrigés des exercices	6

1. Forme algébrique

Nombres complexes

Il existe un ensemble $\mathbb{C}$ de nombres, les **nombres complexes**, qui contient les réels, un nombre i tel que $i^2 = -1$, et dans lequel on calcule avec les mêmes règles que dans $\mathbb{R}$. Tout complexe s'écrit de façon unique sous **forme algébrique**

$$z = a + ib, \quad a = \operatorname{Re}(z) \text{ (partie réelle)}, \quad b = \operatorname{Im}(z) \text{ (partie imaginaire)},$$

avec a et b réels. Si $b = 0$, z est réel ; si $a = 0$, z est imaginaire pur.

En électricité

Pour ne pas confondre avec l'intensité i , les électriciens notent j le nombre tel que $j^2 = -1$.

Égalité

$a + ib = a' + ib' \iff a = a' \text{ et } b = b'$ (on identifie parties réelles et parties imaginaires).

Somme et produit

$$(2 + 3i) + (1 - i) = 3 + 2i. \quad (2 + 3i)(1 - i) = 2 - 2i + 3i - 3i^2 = 2 + i + 3 = 5 + i.$$

2. Conjugué et quotient

Conjugué

Le **conjugué** de $z = a + ib$ est $\overline{z} = a - ib$. On a $z\overline{z} = a^2 + b^2$, un réel positif.

Règles

$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}; \quad \overline{zz'} = \overline{z} \times \overline{z'}; \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}} \quad (z' \neq 0).$$

Forme algébrique d'un quotient

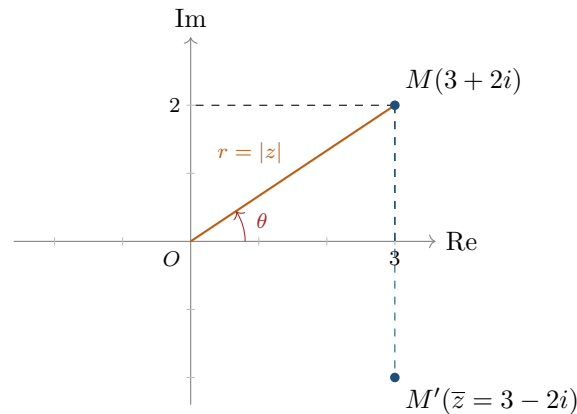
On multiplie numérateur et dénominateur par le **conjugué du dénominateur** : le dénominateur devient réel.

$$\frac{1 + 2i}{3 - i} = \frac{(1 + 2i)(3 + i)}{(3 - i)(3 + i)} = \frac{3 + i + 6i + 2i^2}{9 + 1} = \frac{1 + 7i}{10} = 0,1 + 0,7i.$$

3. Plan complexe

Affixe

Dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, le point $M(a; b)$ et le vecteur $\vec{w}(a; b)$ ont pour **affixe** $z = a + ib$. L'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$; celle du milieu de $[AB]$ est $\frac{z_A + z_B}{2}$.



Le point d'affixe $z = 3 + 2i$, son conjugué (symétrique par rapport à l'axe réel), son module r et un argument θ .

4. Module

Module

Le **module** de $z = a + ib$ est $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$: c'est la distance OM . Pour deux points, $AB = |z_B - z_A|$.

Règles

$$|zz'| = |z| \times |z'| \text{ et } \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad (z' \neq 0).$$

$$|3 - 4i| = \sqrt{9 + 16} = 5; |(3 - 4i)(1 + i)| = 5 \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}.$$

5. Argument et forme trigonométrique

Argument

Pour $z \neq 0$ d'image M , un **argument** de z , noté $\arg z$, est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$; il est défini à $2k\pi$ près. Avec $r = |z|$:

$$\cos \theta = \frac{a}{r}, \quad \sin \theta = \frac{b}{r}.$$

Forme trigonométrique

Tout complexe non nul s'écrit $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ avec $r = |z| > 0$ et $\theta = \arg z$. Réciproquement, $a = r \cos \theta$ et $b = r \sin \theta$.

De la forme algébrique à la forme trigonométrique

On calcule $r = |z|$, puis $\cos \theta = \frac{a}{r}$ et $\sin \theta = \frac{b}{r}$; on reconnaît θ dans les valeurs remarquables en vérifiant les **deux** signes (le quadrant).

- $z = 1 + i\sqrt{3} : r = \sqrt{1+3} = 2, \cos \theta = \frac{1}{2}, \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ donc } \theta = \frac{\pi}{3} \text{ et } z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right).$
- $z = -1 + i : r = \sqrt{2}, \cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ donc } \theta = \frac{3\pi}{4}.$
- Dans l'autre sens : $4 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = 4 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = -2\sqrt{3} + 2i.$

Impédance d'un dipôle

Un dipôle a pour impédance complexe $Z = 30 + 40j$ (en ohms). Son module $|Z| = \sqrt{900 + 1600} = 50 \Omega$ est le rapport des amplitudes de la tension et de l'intensité ; son argument, tel que $\cos \theta = 0,6$ et $\sin \theta = 0,8$, vaut environ $0,93 \text{ rad } (53,1^\circ)$: c'est le déphasage de la tension sur l'intensité.

6. Erreurs classiques**À éviter**

- Oublier que $i^2 = -1$ en développant.
- Écrire $|a + ib| = a + b$ ou oublier la racine carrée.
- Donner un argument sans vérifier le quadrant : $\cos \theta = \frac{1}{2}$ ne suffit pas à conclure $\theta = \frac{\pi}{3}$.
- Multiplier un quotient par le dénominateur au lieu de son conjugué.

7. Fiche de synthèse

Forme algébrique	$z = a + ib ; i^2 = -1$
Conjugué	$\bar{z} = a - ib ; z\bar{z} = a^2 + b^2 ; \text{ quotient : multiplier par le conjugué}$
Affixe	$\overrightarrow{AB} : z_B - z_A ; \text{ milieu : } \frac{z_A + z_B}{2}$
Module	$ z = \sqrt{a^2 + b^2} ; AB = z_B - z_A ; zz' = z z' $
Forme trigonométrique	$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) ; \cos \theta = \frac{a}{r}, \sin \theta = \frac{b}{r}$

8. Exercices d'application

Exercice 1 – Calculs

Calculer $(3 - 2i) + (1 + 5i)$ et $(3 - 2i)(1 + 5i)$.

Exercice 2 – Quotient

Écrire $\frac{5}{2+i}$ sous forme algébrique.

Exercice 3 – Forme trigonométrique

Déterminer le module et un argument de $z = \sqrt{3} - i$, puis sa forme trigonométrique.

Exercice 4 – Distance

A et B ont pour affixes $1 + 2i$ et $4 - 2i$. Calculer AB et l'affixe du milieu de $[AB]$.

Exercice 5 – Forme algébrique

Écrire $2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ sous forme algébrique.

9. Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

Corrigé. $(3 - 2i) + (1 + 5i) = 4 + 3i$. $(3 - 2i)(1 + 5i) = 3 + 15i - 2i - 10i^2 = 3 + 13i + 10 = 13 + 13i$.

Corrigé de l'exercice 2

Corrigé. $\frac{5}{2+i} = \frac{5(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{5(2-i)}{5} = 2 - i$.

Corrigé de l'exercice 3

Corrigé. $r = \sqrt{3+1} = 2$; $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin \theta = -\frac{1}{2}$, donc $\theta = -\frac{\pi}{6}$: $z = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right)$.

Corrigé de l'exercice 4

Corrigé. $z_B - z_A = 3 - 4i$, donc $AB = \sqrt{9+16} = 5$. Milieu : $\frac{(1+2i) + (4-2i)}{2} = 2,5$.

Corrigé de l'exercice 5

Corrigé. $2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.