

Plaquette 4 - Méthode d'Euler pas à pas

Primitives — Première STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Le principe. On veut approcher la solution de $y' = f(x; y)$ partant d'un point $(x_0; y_0)$. Sur un petit pas h , on remplace la courbe par sa **tangente** :

$$y_{n+1} = y_n + h \times f(x_n; y_n) \quad x_{n+1} = x_n + h$$

C'est exactement l'approximation affine $f(a + h) \approx f(a) + hf'(a)$, appliquée **en chaîne**.

Le tableau de marche. On dresse toujours le même tableau :

n	x_n	y_n	$y'_n = f(x_n; y_n)$	$h \times y'_n$
0	x_0	y_0	...	...
1	$x_0 + h$	$y_0 + hy'_0$	...	...

Ce qu'il faut savoir sur l'erreur.

- Chaque pas introduit une petite erreur, et ces erreurs s'**accumulent**.
- Diviser le pas par 2 divise environ l'erreur finale par 2.
- Pour une solution qui **tourne vers le haut** (croissance qui s'accélère), Euler **sous-estime** ; pour une décroissance qui ralentit, Euler sous-estime aussi la valeur finale.

Cas très fréquent en STI2D : $y' = ay + b$, par exemple un refroidissement $\theta' = -k(\theta - \theta_{\text{air}})$ ou une charge de condensateur.

△ L'ordre des deux lignes compte : on calcule y'_n **avec les valeurs du rang n** , puis seulement on met à jour y et x .

Correction de l'exercice 1 - Un premier pas

La méthode d'Euler avance d'un pas h en suivant la tangente : la nouvelle valeur est l'ancienne plus le pas multiplié par la dérivée au point de départ,

$$y_1 = y_0 + h \times y'_0$$

Au départ, $x_0 = 0$ et $y_0 = 1$, et la dérivée vaut $y'_0 = 2 \times 0 = 0$. Donc $y_1 = 1 + 0,5 \times 0 = 1$, en $x_1 = 0,5$.

La solution exacte est $y = x^2 + 1$ (sa dérivée est $2x$ et elle vaut 1 en 0), qui donne $y(0,5) = 1,25$. L'erreur vaut 0,25 : sur ce premier pas, Euler utilise une pente nulle alors que la courbe commence à monter.

Réponse. $y_1 = 1$ (valeur exacte : 1,25).

Correction de l'exercice 2 - Trois pas d'Euler

On répète le pas d'Euler $y_{n+1} = y_n + 0,5 \times y'_n$, avec $y'_n = 2x_n$ recalculée à chaque rang.

- Rang 0 : $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $y'_0 = 0$.
- Rang 1 : $y_1 = 1 + 0,5 \times 0 = 1$, puis $y'_1 = 2 \times 0,5 = 1$.
- Rang 2 : $y_2 = 1 + 0,5 \times 1 = 1,5$, puis $y'_2 = 2$.
- Rang 3 : $y_3 = 1,5 + 0,5 \times 2 = 2,5$.

n	0	1	2	3
x	0	0,5	1	1,5
y	1	1	1,5	2,5

La valeur exacte en 1,5 vaut $1,5^2 + 1 = 3,25$: l'erreur atteint 0,75, contre 0,25 après un pas. Elle **s'accumule** d'un pas à l'autre.

Réponse. $y_3 = 2,5$ en $x = 1,5$ (exact : 3,25).

Correction de l'exercice 3 - L'effet du pas

On applique $y_{n+1} = y_n + 0,25 \times 2x_n$ quatre fois.

- $x = 0,25$: $y = 1 + 0,25 \times 0 = 1$.
- $x = 0,5$: $y = 1 + 0,25 \times 0,5 = 1,125$.
- $x = 0,75$: $y = 1,125 + 0,25 \times 1 = 1,375$.
- $x = 1$: $y = 1,375 + 0,25 \times 1,5 = 1,75$.

Pas	0,5	0,25	exact
y(1)	1,5	1,75	2

L'erreur passe de 0,5 à 0,25 : diviser le pas par 2 divise ici l'erreur par 2. Le prix à payer est un nombre de calculs doublé, ce qui ne gêne pas un tableur ou un programme.

Réponse. $y(1) \approx 1,75$ contre 1,5 avec $h = 0,5$ (exact : 2).

Correction de l'exercice 4 - Une équation en y

Ici la dérivée dépend de y lui-même : $y' = 0,5y$. On la recalcule à chaque rang avec la valeur courante, puis on avance d'un pas $h = 1$.

- Rang 0 : $y_0 = 100$, $y'_0 = 50$, d'où $y_1 = 100 + 50 = 150$.
- Rang 1 : $y'_1 = 75$, d'où $y_2 = 150 + 75 = 225$.
- Rang 2 : $y'_2 = 112,5$, d'où $y_3 = 225 + 112,5 = 337,5$.

Chaque pas s'écrit $y_{n+1} = y_n + 0,5y_n$, soit

$$y_{n+1} = 1,5y_n$$

La suite obtenue est géométrique de raison $1 + 0,5h = 1,5$: **contrôle**, $100 \times 1,5^3 = 337,5$.

Réponse. $y_1 = 150$, $y_2 = 225$, $y_3 = 337,5$.

Correction de l'exercice 5 - Une décroissance

Avec $y' = -0,2y$ et $h = 1$, chaque pas s'écrit $y_{n+1} = y_n - 0,2y_n = 0,8y_n$.

- $y'_0 = -0,2 \times 500 = -100$, d'où $y_1 = 400$.
- $y'_1 = -80$, d'où $y_2 = 320$.
- $y'_2 = -64$, d'où $y_3 = 256$.

$$y_n = 500 \times 0,8^n \quad y_3 = 500 \times 0,512 = 256$$

La suite est géométrique de raison 0,8 : la décroissance est de plus en plus lente en valeur absolue (on perd 100, puis 80, puis 64), et les valeurs se rapprochent de 0 sans jamais l'atteindre.

Réponse. 400, 320 puis 256.

Correction de l'exercice 6 - Refroidissement

La dérivée est proportionnelle à l'écart entre la température et celle de l'air : on calcule cet écart à chaque minute, puis $\theta_{n+1} = \theta_n + 1 \times \theta'_n$.

- $t = 0$: écart 180, dérivée -18 °C/min, d'où $\theta_1 = 182$ °C.
- $t = 1$: écart 162, dérivée $-16,2$, d'où $\theta_2 = 165,8$ °C.
- $t = 2$: écart 145,8, dérivée $-14,58$, d'où $\theta_3 \approx 151,22$ °C.

t (min)	0	1	2	3
θ (°C)	200	182	165,8	151,2

L'écart à 20 °C est multiplié par 0,9 à chaque pas : **contrôle**, $180 \times 0,9^3 = 131,22$ et $131,22 + 20 = 151,22$ °C. La température tend vers 20 °C.

Réponse. 182 °C, 165,8 °C puis environ 151,2 °C.

Correction de l'exercice 7 - Un pas plus fin sur le refroidissement

Avec $h = 0,5$ min, il faut deux pas pour atteindre $t = 1$.

- Premier pas : la dérivée vaut -18 , donc $\theta = 200 + 0,5 \times (-18) = 191$ °C.
- Second pas : l'écart vaut 171, la dérivée $-17,1$, donc $\theta = 191 - 8,55 = 182,45$ °C.

$$\theta(1) \approx 182,45 \text{ °C (pas 0,5)} \quad \theta(1) \approx 182 \text{ °C (pas 1)}$$

Une méthode plus fine donne environ 182,86 °C : le pas réduit rapproche de cette valeur. Euler **sous-estime** ici la température, il la fait baisser trop vite : au cours d'un pas, la pente réelle diminue en valeur absolue, alors qu'Euler garde la pente du début.

Réponse. 182,45 °C contre 182 °C avec le pas de 1 min.

Correction de l'exercice 8 - Charge d'un condensateur

On calcule à chaque pas l'écart à 12 V, la dérivée $u' = 0,5 \times \text{écart}$, puis $u_{n+1} = u_n + 0,5 \times u'_n$.

- Rang 0 : écart 12, dérivée 6 V/s, d'où $u_1 = 0 + 3 = 3$ V.
- Rang 1 : écart 9, dérivée 4,5, d'où $u_2 = 3 + 2,25 = 5,25$ V.
- Rang 2 : écart 6,75, dérivée 3,375, d'où $u_3 = 5,25 + 1,6875 \approx 6,94$ V.

L'écart est multiplié à chaque pas par $1 - 0,5 \times 0,5 = 0,75$:

$$12 - u_3 = 12 \times 0,75^3 = 5,0625$$

ce qui confirme $u_3 = 6,9375$ V. La tension monte de moins en moins vite et se rapproche de 12 V, la tension d'alimentation.

Réponse. 3 V ; 5,25 V ; environ 6,94 V.

Correction de l'exercice 9 - Compléter un tableau

À chaque rang, on calcule d'abord la dérivée $y' = x + y$ avec les valeurs **du rang**, puis on avance : $y_{n+1} = y_n + 0,2 \times y'_n$.

- Rang 0 : $y'_0 = 0 + 1 = 1$.
- Rang 1 : $y_1 = 1 + 0,2 \times 1 = 1,2$, puis $y'_1 = 0,2 + 1,2 = 1,4$.
- Rang 2 : $y_2 = 1,2 + 0,2 \times 1,4 = 1,48$.

n	0	1	2
x	0	0,2	0,4
y	1	1,2	1,48
y'	1	1,4	—

La dérivée dépend à la fois de x et de y : l'erreur classique consiste à calculer y'_n avec la nouvelle valeur y_{n+1} . L'ordre correct est toujours : dérivée au rang n , **puis** mise à jour.

Réponse. $y'_0 = 1$; $y_1 = 1,2$ et $y'_1 = 1,4$; $y_2 = 1,48$.

Correction de l'exercice 10 - Corriger une erreur d'ordre

L'élève a calculé la dérivée avec y_1 , la valeur qu'il cherche : y_1 apparaît alors des deux côtés de l'égalité. Ce n'est plus la méthode d'Euler, qui utilise la pente **au point de départ** du pas :

$$y_1 = y_0 + h \times y'_0 \quad \text{avec } y'_0 = 0,4 \times y_0$$

Calcul correct : $y'_0 = 0,4 \times 50 = 20$, donc $y_1 = 50 + 1 \times 20 = 70$. Au pas suivant, $y'_1 = 0,4 \times 70 = 28$ et $y_2 = 98$.

À retenir : Euler regarde **en arrière**. La variante où la pente est prise en fin de pas est une autre méthode, qui demande de résoudre une équation à chaque pas.

Réponse. La dérivée se calcule avec y_0 : $y_1 = 50 + 20 = 70$.

Correction de l'exercice 11 - Deux pas pour comparer

Avec $h = 1$. Un seul pas : la dérivée vaut $y'_0 = 1$, donc $y(1) \approx 1 + 1 \times 1 = 2$.

Avec $h = 0,5$. Chaque pas multiplie y par $1 + 0,5 = 1,5$: $y = 1,5$ en 0,5, puis $y = 1,5 \times 1,5 = 2,25$ en 1.

Pas	1	0,5
y(1)	2	2,25

La valeur exacte vaut environ 2,718 : l'erreur passe de 0,718 à 0,468. L'amélioration est nette mais lente. En général, avec $\frac{1}{h}$ pas, Euler donne

$$y(1) \approx (1 + h)^{1/h}$$

expression qui se rapproche de 2,718 quand h devient très petit : pour $h = 0,01$, elle vaut environ 2,705.

Réponse. $y(1) \approx 2$ puis 2,25 (valeur exacte : environ 2,718).

Correction de l'exercice 12 - Une population

Chaque année, la population augmente de 0,03 fois sa valeur :

$$p_{n+1} = p_n + 1 \times 0,03p_n = 1,03p_n.$$

— Année 1 : dérivée 600, $p_1 = 20\,600$.

— Année 2 : dérivée 618, $p_2 = 21\,218$.

— Année 3 : dérivée 636,54, $p_3 = 21\,854,54$.

$$p_3 = 20\,000 \times 1,03^3 = 21\,854,54$$

La population atteint environ 21 855 habitants, soit une hausse d'environ 9,3 % en trois ans. Avec un pas d'un an, la méthode d'Euler redonne exactement la suite géométrique

d'un taux annuel de 3 %.

Réponse. Environ 21 855 habitants.

Correction de l'exercice 13 - Estimer l'instant d'un seuil

D'après l'exercice sur le refroidissement, l'écart à 20 °C est multiplié par 0,9 à chaque minute :

$$\theta_n - 20 = 180 \times 0,9^n$$

La pièce passe sous 100 °C quand l'écart passe sous 80. On calcule l'écart de proche en proche :

- rang 5 : $180 \times 0,9^5 \approx 106,3$, soit 126,3 °C ;
- rang 7 : $180 \times 0,9^7 \approx 86,1$, soit 106,1 °C ;
- rang 8 : $180 \times 0,9^8 \approx 77,5$, soit 97,5 °C.

Le seuil est franchi entre la septième et la huitième minute : selon ce calcul, la pièce est sous 100 °C au bout de 8 minutes ($106,1 > 100 > 97,5$).

Réponse. Au bout de 8 minutes (environ 97,5 °C).

Correction de l'exercice 14 - Quand Euler est exact

La dérivée est constante, égale à 3 : chaque pas ajoute $0,5 \times 3 = 1,5$.

$$y_1 = 3,5 \quad y_2 = 5 \quad y_3 = 6,5 \quad y_4 = 8$$

Après quatre pas, on est en $x = 2$. La solution exacte est $y = 3x + 2$ (dérivée 3, valeur 2 en 0), qui vaut aussi 8 en $x = 2$: l'erreur est **nulle**.

Explication : la méthode d'Euler suit la tangente, et la tangente à une droite est la droite elle-même. Euler est exact lorsque la solution est **affine** ; toute erreur provient de la courbure de la solution.

Réponse. On trouve exactement 8 : Euler est exact quand la solution est une droite.

Correction de l'exercice 15 - Estimer le sens de l'erreur

La solution de $y' = y$ croît de plus en plus vite : sa pente est égale à sa valeur, donc elle augmente avec elle. Sur $[0 ; 1]$, la pente passe d'environ 1 au début à environ 2,7 à la fin.

Euler, lui, garde la pente **du début** sur tout le pas :

$$y(1) \approx y(0) + 1 \times y'(0) = 1 + 1 = 2$$

Cette pente est trop faible : le résultat est **sous-estimé**. Géométriquement, la tangente passe sous une courbe qui s'incurve vers le haut.

À l'inverse, pour une solution qui s'incurve vers le bas, Euler surestime : c'est le cas de la charge d'un condensateur $u' = 0,5(12 - u)$, pour laquelle Euler donne 3 V après 0,5 s, au-dessus de la valeur réelle d'environ 2,65 V. Pour réduire l'erreur, on diminue le pas.

Réponse. La pente croît pendant le pas, Euler garde la pente initiale, trop faible : il sous-estime.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : la charge complète d'un condensateur

a) On calcule à chaque pas l'écart à 24 V et la dérivée $2 \times$ écart, puis

$$u_{n+1} = u_n + 0,1 \times u'_n : u_1 = 0 + 0,1 \times 48 = 4,8 \text{ V}, u_2 = 4,8 + 3,84 = 8,64 \text{ V}, \\ u_3 = 8,64 + 3,072 = 11,712 \text{ V}, u_4 = 11,712 + 2,4576 \approx 14,17 \text{ V}.$$

b) On note $e_n = 24 - u_n$. Le pas d'Euler s'écrit $u_{n+1} = u_n + 0,2e_n$, donc

$$e_{n+1} = 24 - u_n - 0,2e_n = e_n - 0,2e_n = 0,8e_n$$

La suite (e_n) est géométrique de raison 0,8 et de premier terme 24 : $e_n = 24 \times 0,8^n$.

Contrôle : $e_4 \approx 9,83$, et $24 - 9,83 = 14,17$ V.

c) $t = 1$ s correspond à 10 pas : $e_{10} = 24 \times 0,8^{10} \approx 2,58$, donc $u \approx 21,42$ V.

d) 90 % de 24 V vaut 21,6 V, soit un écart de 2,4 V : il faut $0,8^n \leq 0,1$. Or $0,8^{10} \approx 0,1074$ et $0,8^{11} \approx 0,0859$: il faut 11 pas, soit $t = 1,1$ s, où $u \approx 21,94$ V (au pas précédent, $21,42 < 21,6$).

Réponse. a) 4,8 ; 8,64 ; 11,71 ; 14,17 V · b) $e_{n+1} = 0,8e_n$ · c) environ 21,42 V · d) à $t = 1,1$ s.