

Plaquette 5 - Primitives et aires : problèmes de synthèse

Primitives — Première STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Primitive et aire. Pour une fonction f **positive** sur $[a; b]$, l'aire comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites $x = a$ et $x = b$ vaut

$$A = F(b) - F(a)$$

où F est **n'importe quelle** primitive de f : la constante disparaît dans la soustraction.

Ce que cela signifie physiquement.

Courbe tracée	L'aire sous la courbe représente
vitesse en fonction du temps	la distance parcourue
débit en fonction du temps	le volume écoulé
puissance en fonction du temps	l'énergie consommée
intensité en fonction du temps	la charge transportée

Valeur moyenne d'une fonction sur $[a; b]$:

$$m = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}$$

C'est la hauteur du rectangle de même aire que la région sous la courbe.

Choisir sa méthode.

- La fonction est un polynôme, un sinus, une puissance : **primitive exacte**.
- La dérivée dépend de la grandeur cherchée ($y' = f(y)$) sans primitive simple : **méthode d'Euler**.
- Un contrôle rapide reste possible pour une fonction **affine** : la valeur moyenne est la moyenne des valeurs extrêmes.

⚠ La formule $F(b) - F(a)$ donne une aire **algébrique** : sur une portion où f est négative, le résultat est négatif. On découpe alors selon le signe de f .

Correction de l'exercice 1 - Une première aire

Pour une fonction positive, l'aire sous la courbe entre a et b s'obtient avec une primitive F :

$$A = F(b) - F(a)$$

Ici $F(x) = x^2$ est une primitive de $2x$, donc $A = F(3) - F(0) = 9 - 0 = 9$ unités d'aire.

Contrôle géométrique : la région sous la droite $y = 2x$ entre 0 et 3 est un triangle rectangle de base 3 et de hauteur $f(3) = 6$, d'aire $\frac{3 \times 6}{2} = 9$. Les deux méthodes concordent.

Réponse. $A = 9$ unités d'aire.

Correction de l'exercice 2 - Sous une parabole

Une primitive de x^2 est $F(x) = \frac{x^3}{3}$, donc

$$A = F(3) - F(0) = \frac{27}{3} - 0 = 9 \text{ unités d'aire}$$

Contrôle par encadrement : sur $[0; 3]$, f croît de 0 à 9, donc la région est contenue dans le rectangle de base 3 et de hauteur 9, d'aire 27 : on a bien $0 < 9 < 27$.

On peut affiner : la parabole passe **sous** la corde qui joint $(0; 0)$ à $(3; 9)$, donc l'aire est inférieure à celle du triangle sous cette corde, $\frac{3 \times 9}{2} = 13,5$. C'est le cas. L'aire vaut exactement le tiers du rectangle englobant.

Réponse. $A = 9$ unités d'aire, soit le tiers du rectangle englobant.

Correction de l'exercice 3 - Entre deux bornes quelconques

Une primitive de $3x^2 + 2$ est $F(x) = x^3 + 2x$. La fonction est positive sur $[1; 4]$, donc l'aire vaut

$$A = F(4) - F(1) = (64 + 8) - (1 + 2) = 72 - 3 = 69 \text{ unités d'aire}$$

Le choix de la primitive n'a pas d'importance : avec $G(x) = x^3 + 2x + 100$, on obtient $172 - 103 = 69$, car la constante disparaît dans la différence.

Contrôle par encadrement : f croît de $f(1) = 5$ à $f(4) = 50$ sur un intervalle de largeur 3, donc l'aire est comprise entre 15 et 150.

Réponse. $A = 69$ unités d'aire.

Correction de l'exercice 4 - Distance et aire

a) La position est une primitive de la vitesse : $x(t) = 2t^2 + 2t$. La distance parcourue entre 0 et 5 s est la variation de cette primitive :

$$d = x(5) - x(0) = 50 + 10 - 0 = 60 \text{ m}$$

b) Sous la droite $v(t) = 4t + 2$, la région est un trapèze de « bases » $v(0) = 2$ et $v(5) = 22$, et de « hauteur » 5 : son aire vaut $\frac{(2 + 22) \times 5}{2} = 60$. Les deux calculs concordent.

La vitesse moyenne vaut $\frac{60}{5} = 12$ m/s, exactement la moyenne de 2 et 22, puisque la vitesse est affine.

Réponse. a) 60 m · b) le trapèze donne aussi 60 m.

Correction de l'exercice 5 - Valeur moyenne d'une fonction

La valeur moyenne d'une fonction sur $[a; b]$ est la hauteur du rectangle de même base qui aurait la même aire :

$$m = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}$$

Avec $F(x) = \frac{x^3}{3}$: $F(3) - F(0) = 9$ et la largeur vaut 3, donc $m = \frac{9}{3} = 3$.

Un rectangle de base 3 et de hauteur 3 a bien une aire de 9. Cette moyenne est comprise entre $f(0) = 0$ et $f(3) = 9$, mais elle n'est **pas** au milieu $(4,5)$, car la fonction n'est pas affine. La fonction prend la valeur 3 en $x = \sqrt{3} \approx 1,73$.

Réponse. $m = 3$.

Correction de l'exercice 6 - Volume écoulé

Le volume écoulé entre deux instants est la variation d'une primitive du débit. Une primitive de $3t^2$ est $V(t) = t^3$, donc

$$V(6) - V(2) = 216 - 8 = 208 \text{ L}$$

Le débit moyen vaut $\frac{208}{4} = 52 \text{ L/min}$. La moyenne des débits extrêmes, $q(2) = 12$ et $q(6) = 108$, vaudrait 60 L/min : elle **surestime**, car le débit n'est pas affine. Sa courbe passe sous la corde qui joint ses extrémités, si bien que le débit reste longtemps faible avant de monter vite.

Réponse. 208 litres.

Correction de l'exercice 7 - Énergie et puissance

a) L'énergie est la variation d'une primitive de la puissance. Une primitive de $1\,200 + 300t$ est $W(t) = 1\,200t + 150t^2$, donc

$$W(60) - W(0) = 72\,000 + 540\,000 = 612\,000 \text{ J} = 612 \text{ kJ}$$

b) La puissance moyenne est l'énergie divisée par la durée : $\frac{612\,000}{60} = 10\,200 \text{ W}$.

Contrôle : la puissance est affine, de $1\,200 \text{ W}$ à $p(60) = 19\,200 \text{ W}$; sa moyenne vaut $\frac{1\,200 + 19\,200}{2} = 10\,200 \text{ W}$. En kilowattheures, $\frac{612\,000}{3\,600\,000} = 0,17 \text{ kWh}$.

Réponse. a) 612 kJ · b) $10\,200 \text{ W}$.

Correction de l'exercice 8 - Aire sous un signal

Une primitive de $5 \sin(2t)$ est $F(t) = -\frac{5 \cos(2t)}{2}$. Sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $2t$ varie de 0 à π , où le sinus est positif : la fonction est positive et l'aire vaut $F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0)$.

En $\frac{\pi}{2}$, $\cos \pi = -1$ et $F = 2,5$; en 0 , $\cos 0 = 1$ et $F = -2,5$.

$$A = 2,5 - (-2,5) = 5 \text{ unités d'aire}$$

La valeur moyenne vaut $\frac{5}{\pi/2} = \frac{10}{\pi} \approx 3,18$, soit environ 64% du maximum 5 du signal sur cette demi-période.

Réponse. $A = 5$ unités d'aire.

Correction de l'exercice 9 - Une aire nulle

Une primitive de $\cos t$ est $F(t) = \sin t$, donc

$$F(2\pi) - F(0) = \sin 2\pi - \sin 0 = 0$$

Cette différence est une aire **algébrique** : les parties où $\cos t > 0$ comptent positivement, celles où $\cos t < 0$ négativement. Sur une période, elles se compensent exactement.

L'aire géométrique n'est pas nulle : il faut découper selon le signe. Sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$, et la période comporte quatre morceaux identiques en valeur absolue : 4 unités d'aire. En physique, un courant alternatif transporte ainsi une charge nette nulle sur une période.

Réponse. La différence vaut 0 : les aires positives et négatives se compensent.

Correction de l'exercice 10 - Découper selon le signe

a) Une primitive de $x - 2$ est $F(x) = \frac{x^2}{2} - 2x$, donc $F(4) - F(0) = (8 - 8) - 0 = 0$.

b) f est négative sur $[0; 2[$ et positive sur $]2; 4]$: on découpe en 2.

$$F(2) - F(0) = -2 \quad F(4) - F(2) = 0 - (-2) = 2$$

La première partie, sous l'axe, a une aire de 2 unités ; la seconde aussi. L'aire géométrique totale vaut $2 + 2 = 4$ unités.

Contrôle géométrique : ce sont deux triangles de base 2 et de hauteur 2, d'aire 2 chacun. Une différence $F(b) - F(a)$ nulle ne signifie donc pas une aire nulle.

Réponse. a) 0 · b) 4 unités d'aire (deux triangles de 2).

Correction de l'exercice 11 - Choisir sa méthode

On primitive directement lorsque la dérivée ne dépend que de la variable t et qu'on en connaît une primitive ; sinon, on approche la solution par la méthode d'Euler.

a) $q(t) = 4t + 10$ ne dépend que de t : primitive **exacte**, $V(t) = 2t^2 + 10t + C$.

b) $\theta' = -0,15(\theta - 18)$: la dérivée dépend de la température cherchée, aucune primitive directe n'est disponible dans ce chapitre. Méthode d'**Euler**.

c) $v(t) = 3 \sin(2t) + 5$ ne dépend que de t et figure au tableau :

$$x(t) = -\frac{3 \cos(2t)}{2} + 5t + C$$

primitive **exacte**.

Réponse. a) primitive exacte · b) Euler · c) primitive exacte.

Correction de l'exercice 12 - Deux phases à cumuler

On traite les deux phases successivement.

Phase 1 : une primitive de $10t$ est $5t^2$, donc le volume recueilli en 6 min vaut $5 \times 36 = 180$ L. À la fin de cette phase, le débit vaut $10 \times 6 = 60$ L/min : il se raccorde bien au débit constant de la phase 2.

Phase 2 : à 60 L/min pendant 10 min, on recueille 600 L.

$$V = 180 + 600 = 780 \text{ L}$$

Sur les 16 min, le débit moyen vaut $\frac{780}{16} = 48,75$ L/min, inférieur au débit maximal de 60 L/min, ce qui est cohérent avec la phase de montée.

Réponse. 780 litres (180 puis 600).

Correction de l'exercice 13 - Retrouver une borne

Une primitive de $6t$ nulle en 0 (cuve vide) est $V(t) = 3t^2$. On cherche l'instant où le volume vaut 300 L :

$$3t^2 = 300 \Leftrightarrow t^2 = 100 \Leftrightarrow t = 10 \text{ min}$$

en ne gardant que la solution positive.

Vérification : $3 \times 100 = 300$ L. Le débit vaut alors 60 L/min, et le débit moyen sur les 10 minutes $\frac{300}{10} = 30$ L/min : le débit étant affine et nul au départ, sa moyenne vaut bien la moitié de sa valeur finale.

Réponse. Au bout de 10 minutes.

Correction de l'exercice 14 - Comparer deux moyennes

Une primitive de x^3 est $F(x) = \frac{x^4}{4}$. La valeur moyenne sur $[0; 2]$ vaut

$$m = \frac{F(2) - F(0)}{2 - 0} = \frac{4}{2} = 2$$

La moyenne des valeurs extrêmes vaut $\frac{0+8}{2} = 4$, le double. La courbe de x^3 passe **sous** la corde qui joint $(0; 0)$ à $(2; 8)$: la fonction reste longtemps petite avant de monter vite, et la moyenne des extrêmes surestime.

Les deux moyennes ne coïncident que pour une fonction affine. La fonction prend sa valeur moyenne 2 en $x = \sqrt[3]{2} \approx 1,26$.

Réponse. Valeur moyenne 2, contre 4 pour la moyenne des extrêmes.

Correction de l'exercice 15 - Une aire à encadrer

$f(x) = x^2$ est croissante sur $[1; 3]$: elle y varie de $f(1) = 1$ à $f(3) = 9$. Sur un intervalle de largeur 2, la région est donc comprise entre un rectangle de hauteur 1 et un rectangle de hauteur 9 :

$$1 \times 2 < A < 9 \times 2 \quad \text{soit} \quad 2 < A < 18$$

Valeur exacte : avec $F(x) = \frac{x^3}{3}$, $A = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3} \approx 8,67$, bien dans l'encadrement.

La valeur moyenne vaut $\frac{26}{6} \approx 4,33$. L'encadrement est grossier, mais il suffit à détecter une erreur de calcul importante.

Réponse. $2 < A < 18$, et $A = \frac{26}{3} \approx 8,67$.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : un cycle de charge complet

a) $p(0) = 2\,000$ W, $p(4) = 2\,000 + 2\,400 - 480 = 3\,920$ W et
 $p(8) = 2\,000 + 4\,800 - 1\,920 = 4\,880$ W.

b) $p'(t) = 600 - 60t$ s'annule en $t = 10$ h, hors du poste. Sur $[0; 8]$, $p'(t) \geq 600 - 480 > 0$: la puissance **croît** tout le poste et son maximum, 4 880 W, est atteint à la fin.

c) Une primitive de p est $W(t) = 2\,000t + 300t^2 - 10t^3$, et le temps est en heures :

$$W(8) - W(0) = 16\,000 + 19\,200 - 5\,120 = 30\,080 \text{ Wh} = 30,08 \text{ kWh}$$

d) Le coût vaut $30,08 \times 0,18 \approx 5,41$ €, et la puissance moyenne $\frac{30\,080}{8} = 3\,760$ W. La moyenne des extrêmes ne vaut que 3 440 W : la puissance monte vite au début puis ralentit, sa courbe passe **au-dessus** de la corde.

Réponse. a) 2 000 W, 3 920 W, 4 880 W · b) aucun maximum intérieur, la puissance croît jusqu'à la fin · c) 30,08 kWh · d) environ 5,41 € et 3 760 W de moyenne.