

Plaquette 1 - Primitives usuelles, condition initiale et méthode d'Euler

Primitives — Première STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules du cours.

- F est une **primitive** de f sur un intervalle si $F' = f$ sur cet intervalle.
- Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une **constante** : si F est une primitive, toutes les primitives s'écrivent $F(x) + C$.
- Primitives usuelles :

$f(x)$	k	x^n	$\frac{1}{x^2}$	$\cos(\omega x)$	$\sin(\omega x)$
$F(x)$	kx	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$-\frac{1}{x}$	$\frac{\sin(\omega x)}{\omega}$	$-\frac{\cos(\omega x)}{\omega}$

- Linéarité : une primitive de $u + v$ est $U + V$; une primitive de ku est kU .
- **Condition initiale** : la donnée d'un point $F(x_0) = y_0$ détermine la constante C , donc **une seule** primitive.
- **Méthode d'Euler** : pour approcher la solution de $y' = f(x; y)$ avec un pas h ,

$$y_{n+1} = y_n + h \times f(x_n; y_n) \quad x_{n+1} = x_n + h$$

C'est l'approximation affine appliquée de proche en proche.

- Contrôle systématique : on **dérive** la primitive trouvée pour vérifier qu'on retombe sur f .

Correction de l'exercice 1 - Primitives d'un polynôme

On applique la formule $x^n \rightarrow \frac{x^{n+1}}{n+1}$ terme à terme.

- a) $F(x) = 3x^2 + 4x$ (car $(3x^2)' = 6x$ et $(4x)' = 4$).
- b) $G(x) = x^3 - x^2 + 5x$.
- c) $H(x) = \frac{x^4}{4}$.
- Contrôle systématique : on dérive. Pour b), $(x^3 - x^2 + 5x)' = 3x^2 - 2x + 5 = g(x)$. Correct.

Réponse. a) $3x^2 + 4x$ · b) $x^3 - x^2 + 5x$ · c) $\frac{x^4}{4}$.

Correction de l'exercice 2 - Toutes les primitives

- a) $F(x) = x^2 - 3x$ (vérification : $F'(x) = 2x - 3$).
- b) Toutes les primitives s'obtiennent en ajoutant une constante :

$$F(x) = x^2 - 3x + C \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

- c) Il y en a une **infinité** : une par valeur de C . Graphiquement, toutes ces courbes se déduisent l'une de l'autre par translation verticale.

Réponse. a) $x^2 - 3x$ · b) $x^2 - 3x + C$ · c) une infinité.

Correction de l'exercice 3 - Primitive de $1/x^2$

Formule du cours : une primitive de $\frac{1}{x^2}$ est $-\frac{1}{x}$.

— Par linéarité, une primitive de $\frac{3}{x^2}$ est

$$F(x) = -\frac{3}{x}$$

— Vérification : $F(x) = -3x^{-1}$, donc $F'(x) = 3x^{-2} = \frac{3}{x^2} = f(x)$. Correct.

Piège. On retient directement que la primitive de $\frac{1}{x^2}$ est $-\frac{1}{x}$, **avec le signe moins** : c'est l'erreur la plus fréquente du chapitre.

Réponse. $F(x) = -\frac{3}{x}$.

Correction de l'exercice 4 - Primitives de signaux sinusoïdaux

Formules du cours : une primitive de $\cos(\omega t)$ est $\frac{\sin(\omega t)}{\omega}$, et une primitive de $\sin(\omega t)$ est $-\frac{\cos(\omega t)}{\omega}$.

— a) $F(t) = \frac{\sin(5t)}{5}$.

— b) $G(t) = -\frac{\cos(100\pi t)}{100\pi}$.

— c) $H(t) = 4 \times \frac{\sin(2t)}{2} - 3 \times \left(-\frac{\cos(2t)}{2}\right) = 2 \sin(2t) + \frac{3 \cos(2t)}{2}$.

— Contrôle de c) : $H'(t) = 2 \times 2 \cos(2t) + \frac{3}{2} \times (-2 \sin(2t)) = 4 \cos(2t) - 3 \sin(2t)$. Correct.

Réponse. a) $\frac{\sin(5t)}{5}$. b) $-\frac{\cos(100\pi t)}{100\pi}$. c) $2 \sin(2t) + \frac{3 \cos(2t)}{2}$.

Correction de l'exercice 5 - Primitive avec condition initiale

— Forme générale des primitives : $F(x) = 2x^2 - x + C$.

— On utilise la condition initiale : $F(2) = 8 - 2 + C = 6 + C$.

— Or $F(2) = 5$, donc $6 + C = 5$ et $C = -1$.

$$F(x) = 2x^2 - x - 1$$

— Vérification : $F'(x) = 4x - 1 = f(x)$ et $F(2) = 8 - 2 - 1 = 5$. Les deux conditions sont satisfaites.

Réponse. $F(x) = 2x^2 - x - 1$.

Correction de l'exercice 6 - De la vitesse à la position

a) La position est une primitive de la vitesse.

— Primitives de v : $d(t) = \frac{3t^2}{2} + 2t + C$.

— Condition initiale : $d(0) = C = 5$.

$$d(t) = 1,5t^2 + 2t + 5$$

b) $d(4) = 1,5 \times 16 + 8 + 5 = 24 + 13 = 37$ m.

— Contrôle : $d'(t) = 3t + 2 = v(t)$. Correct.

Réponse. a) $d(t) = 1,5t^2 + 2t + 5$ · b) 37 m.

Correction de l'exercice 7 - De l'accélération à la vitesse

a) La vitesse est une primitive de l'accélération : $v(t) = 2t + C$, et $v(0) = 10$ donne $C = 10$.

$$v(t) = 2t + 10$$

b) La position est une primitive de la vitesse : $d(t) = t^2 + 10t + C'$, et $d(0) = 0$ donne $C' = 0$.

$$d(t) = t^2 + 10t$$

c) $d(6) = 36 + 60 = 96$ m.

— Contrôle par la formule de la physique :

$$d = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = 60 + \frac{1}{2} \times 2 \times 36 = 60 + 36 = 96 \text{ m. Cohérent.}$$

Réponse. a) $v(t) = 2t + 10$ · b) $d(t) = t^2 + 10t$ · c) 96 m.

Correction de l'exercice 8 - Primitive d'un courant

— Une primitive de $\cos(100\pi t)$ est $\frac{\sin(100\pi t)}{100\pi}$.

— Donc $q(t) = 0,02 \times \frac{\sin(100\pi t)}{100\pi} + C = \frac{0,02 \sin(100\pi t)}{100\pi} + C$.

— Condition initiale : $q(0) = 0 + C = 0$, donc $C = 0$.

$$q(t) = \frac{0,02}{100\pi} \sin(100\pi t) \approx 6,37 \times 10^{-5} \sin(100\pi t)$$

— Vérification : en dérivant, $q'(t) = \frac{0,02}{100\pi} \times 100\pi \cos(100\pi t) = 0,02 \cos(100\pi t) = i(t)$.
Correct.

Réponse. $q(t) = \frac{0,02}{100\pi} \sin(100\pi t) \approx 6,37 \times 10^{-5} \sin(100\pi t)$.

Correction de l'exercice 9 - Méthode d'Euler : premier pas

Formule du cours : $y_{n+1} = y_n + h \times y'_n$, avec ici $y'_n = 2y_n$.

— La relation devient $y_{n+1} = y_n + 0,1 \times 2y_n = 1,2 y_n$.

— $y_1 = 1,2 \times 1 = 1,2$;

— $y_2 = 1,2 \times 1,2 = 1,44$;

— $y_3 = 1,2 \times 1,44 = 1,728$.

— Remarque : la suite obtenue est **géométrique** de raison 1,2. Elle approche la fonction exponentielle solution exacte, dont la valeur en 0,3 vaut environ 1,822.

Réponse. $y_1 = 1,2$; $y_2 = 1,44$; $y_3 = 1,728$.

Correction de l'exercice 10 - Méthode d'Euler et refroidissement

Formule d'Euler : $T_{n+1} = T_n + h \times T'_n$, avec $T'_n = -0,05(T_n - 20)$.

— $T_1 = 100 + 1 \times (-0,05) \times (100 - 20) = 100 - 4 = 96$ °C.

— $T_2 = 96 - 0,05 \times 76 = 96 - 3,8 = 92,2$ °C.

— $T_3 = 92,2 - 0,05 \times 72,2 = 92,2 - 3,61 \approx 88,6$ °C.

— Lecture : les écarts diminuent (−4, puis −3,8, puis −3,61) car le refroidissement ralentit à mesure que la pièce s'approche des 20 °C ambiants.

Réponse. $T_1 = 96$ °C ; $T_2 = 92,2$ °C ; $T_3 \approx 88,6$ °C.

Correction de l'exercice 11 - Euler en Python

- La dérivée vaut $y' = 2y$: il faut compléter par $2 * y$, donc la ligne s'écrit $y = y + h * 2 * y$.
- Déroulé pour $h = 0,1$ et $n = 3$: on retrouve 1,2, 1,44, puis 1,728.
- Donc `euler(0.1, 3)` renvoie 1,728.
- Remarque : avec un pas plus petit (par exemple $h = 0,01$ et $n = 30$), on obtient $\approx 1,811$, plus proche de la valeur exacte $\approx 1,822$. **Plus le pas est petit, meilleure est l'approximation.**

Réponse. Compléter par $2 * y$; `euler(0.1, 3)` renvoie 1,728.

Correction de l'exercice 12 - Vérifier une primitive

- a) Pour vérifier qu'une fonction est une primitive, on la dérive : $F'(x) = 3x^2 - 6x + 0 = f(x)$. Donc F est bien une primitive de f .
- b) Toutes les primitives de f s'écrivent $G(x) = x^3 - 3x^2 + C$. La condition $G(1) = 0$ donne $1 - 3 + C = 0$, soit $C = 2$:

$$G(x) = x^3 - 3x^2 + 2$$

- **Contrôle** : $G(1) = 1 - 3 + 2 = 0$ et $G'(x) = 3x^2 - 6x$.
- F et G diffèrent de la constante $5 - 2 = 3$: leurs courbes se déduisent l'une de l'autre par une translation verticale.

Réponse. a) $F'(x) = f(x)$ · b) $G(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

Correction de l'exercice 13 - Énergie consommée par un moteur

- a) La puissance est la dérivée de l'énergie : W est une primitive de p . Terme à terme, 100 donne $100t$ et $40t$ donne $20t^2$; comme on compte l'énergie depuis $t = 0$, $W(0) = 0$ et la constante est nulle :

$$W(t) = 100t + 20t^2$$

- b) $W(10) = 1\,000 + 2\,000 = 3\,000$ J, soit 3 kJ.
- La puissance moyenne vaut $\frac{3\,000}{10} = 300$ W.
 - **Contrôle** : la puissance est affine, elle passe de 100 W à $p(10) = 500$ W, et la moyenne de ces deux valeurs vaut bien 300 W.

Réponse. a) $W(t) = 100t + 20t^2$ · b) 3 000 J ; 300 W en moyenne.

Correction de l'exercice 14 - Signal sinusoïdal et condition initiale

Une primitive de $\cos(\omega t)$ est $\frac{\sin(\omega t)}{\omega}$: on divise par la pulsation $\omega = 50$. Avec le coefficient 10, les primitives de f s'écrivent

$$F(t) = \frac{10 \sin(50t)}{50} + C = 0,2 \sin(50t) + C$$

Comme $\sin 0 = 0$, la condition $F(0) = 2$ donne $C = 2$, d'où $F(t) = 0,2 \sin(50t) + 2$.

- **Vérification** : $F'(t) = 0,2 \times 50 \cos(50t) = 10 \cos(50t)$.
- Le sinus variant entre -1 et 1 , F oscille entre 1,8 et 2,2, autour de la valeur 2 imposée par la condition initiale.

Réponse. $F(t) = 0,2 \sin(50t) + 2$, comprise entre 1,8 et 2,2.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : primitive et aire

a) Primitives de $3x^2$: $F(x) = x^3 + C$. La condition $F(0) = 0$ donne $C = 0$, donc $F(x) = x^3$.

b) $F(2) - F(0) = 8 - 0 = 8$.

c) Encadrement grossier avec deux rectangles de largeur 1 :

- Sur $[0 ; 1]$, f varie de 0 à 3 : l'aire est comprise entre 0 et 3.
- Sur $[1 ; 2]$, f varie de 3 à 12 : l'aire est comprise entre 3 et 12.
- Total : l'aire est comprise entre $0 + 3 = 3$ et $3 + 12 = 15$.
- La valeur 8 appartient bien à $[3 ; 15]$: c'est cohérent.
- Ce lien entre primitive et aire sera étudié en Terminale sous le nom de **calcul intégral**.

Réponse. a) $F(x) = x^3$ · b) 8 · c) $3 \leq 8 \leq 15$: cohérent.