

Plaquette 2 - Primitives usuelles et constante d'intégration

Primitives — Première STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Définition. F est une primitive de f sur un intervalle si

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pour tout } x \text{ de l'intervalle}$$

Toutes les primitives. Si F en est une, les autres s'écrivent $F(x) + C$, où C est une constante réelle. Il y en a donc une **infinité**.

Primitives usuelles.

$f(x)$	k	x	x^n	$\frac{1}{x^2}$	$\cos(\omega x)$	$\sin(\omega x)$
$F(x)$	kx	$\frac{x^2}{2}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$-\frac{1}{x}$	$\frac{\sin(\omega x)}{\omega}$	$-\frac{\cos(\omega x)}{\omega}$

Linéarité.

- Une primitive de $u + v$ est $U + V$.
- Une primitive de ku est kU .

Condition initiale. La donnée d'un point $F(x_0) = y_0$ fixe la constante : il n'y a alors **qu'une** primitive. On remplace, on résout en C , puis on réécrit F complètement.

Le contrôle obligatoire. On **dérive** la primitive trouvée : si on retombe sur f , le résultat est juste. Cette vérification prend dix secondes et évite toutes les erreurs de signe.

⚠ Il n'existe pas de règle pour la primitive d'un produit ou d'un quotient : on développe ou on simplifie d'abord pour se ramener aux formes du tableau.

Correction de l'exercice 1 - Une primitive de polynôme

On remonte terme à terme : une primitive de x^n est $\frac{x^{n+1}}{n+1}$, et un coefficient multiplicatif se conserve.

- Pour $6x^2$: $6 \times \frac{x^3}{3} = 2x^3$.
- Pour $-4x$: $-4 \times \frac{x^2}{2} = -2x^2$.
- Pour la constante 3 : $3x$.

$$F(x) = 2x^3 - 2x^2 + 3x$$

Vérification : en dérivant, $F'(x) = 6x^2 - 4x + 3 = f(x)$. Toute fonction $F + C$, avec C constante, convient aussi ; on en donne une seule, la plus simple.

Réponse. $F(x) = 2x^3 - 2x^2 + 3x$.

Correction de l'exercice 2 - Toutes les primitives

On primitive chaque terme : $4x^3$ a pour primitive $4 \times \frac{x^4}{4} = x^4$, et 2 a pour primitive $2x$.

Une primitive particulière est donc $x^4 + 2x$, et les autres s'en déduisent en ajoutant une

constante :

$$F(x) = x^4 + 2x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Trois exemples : $x^4 + 2x$ ($C = 0$), $x^4 + 2x + 5$ ($C = 5$) et $x^4 + 2x - 3$ ($C = -3$).

Vérification : la dérivée d'une constante étant nulle, ces trois fonctions ont toutes pour dérivée $4x^3 + 2$. Graphiquement, leurs courbes se déduisent les unes des autres par **translation verticale**.

Réponse. $F(x) = x^4 + 2x + C$, par exemple $x^4 + 2x$, $x^4 + 2x + 5$ ou $x^4 + 2x - 3$.

Correction de l'exercice 3 - Avec des fractions

On traite chaque coefficient fractionnaire comme un coefficient ordinaire, qui se conserve :

$$- \frac{x^2}{3} = \frac{1}{3}x^2 \text{ a pour primitive } \frac{1}{3} \times \frac{x^3}{3} = \frac{x^3}{9};$$

$$- \frac{x}{2} \text{ a pour primitive } -\frac{1}{2} \times \frac{x^2}{2} = -\frac{x^2}{4};$$

$$- 1 \text{ a pour primitive } x.$$

$$F(x) = \frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{4} + x$$

Vérification en dérivant terme à terme : $\left(\frac{x^3}{9}\right)' = \frac{3x^2}{9} = \frac{x^2}{3}$, $\left(-\frac{x^2}{4}\right)' = -\frac{2x}{4} = -\frac{x}{2}$ et $(x)' = 1$. On retrouve bien f .

Réponse. $F(x) = \frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{4} + x.$

Correction de l'exercice 4 - Une puissance négative

Le tableau des primitives donne : une primitive de $\frac{1}{x^2}$ sur $]0; +\infty[$ est $-\frac{1}{x}$, car $\left(-\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$. Avec le coefficient 3 :

$$F(x) = 3 \times \left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{3}{x}$$

Vérification : $\left(-\frac{3}{x}\right)' = -3 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{3}{x^2}.$

Oublier le signe moins est l'erreur la plus fréquente du chapitre : $\frac{3}{x}$ aurait pour dérivée $-\frac{3}{x^2}$. Enfin, l'intervalle d'étude ne doit pas contenir 0, où f n'est pas définie.

Réponse. $F(x) = -\frac{3}{x}.$

Correction de l'exercice 5 - Développer d'abord

La proposition de l'élève est fausse : il n'existe pas de formule donnant la primitive d'un produit à partir des primitives des facteurs. Par exemple, $\frac{x^2}{2} \times (x^2 - 3x)$ a pour dérivée un polynôme de degré 3, pas $x(2x - 3)$.

La bonne méthode consiste à **développer** d'abord : $f(x) = 2x^2 - 3x$. On primitive alors terme à terme : $2 \times \frac{x^3}{3}$ et $-3 \times \frac{x^2}{2}$, d'où

$$F(x) = \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}$$

Vérification : $F'(x) = \frac{6x^2}{3} - \frac{6x}{2} = 2x^2 - 3x = x(2x - 3)$.

Réponse. $F(x) = \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}$.

Correction de l'exercice 6 - Simplifier d'abord

Il n'y a pas non plus de règle simple pour primitiver un quotient : on **simplifie** d'abord. Sur $]0; +\infty[$, on sépare la fraction,

$$\frac{x^3 + 2x}{x} = \frac{x^3}{x} + \frac{2x}{x} = x^2 + 2$$

puis on primitive terme à terme : $\frac{x^3}{3}$ et $2x$. Une primitive est donc $F(x) = \frac{x^3}{3} + 2x$.

Vérification : $F'(x) = x^2 + 2$, et pour $x \neq 0$, $x^2 + 2 = \frac{x^3 + 2x}{x}$. Simplifier avant de primitiver transforme un problème difficile en un calcul immédiat.

Réponse. $F(x) = \frac{x^3}{3} + 2x$.

Correction de l'exercice 7 - Un signal sinusoïdal

Pour un signal $\cos(\omega t)$, une primitive est $\frac{\sin(\omega t)}{\omega}$: on **divise** par la pulsation. Ici $\omega = 100\pi$, et avec le coefficient 5,

$$F(t) = 5 \times \frac{\sin(100\pi t)}{100\pi} = \frac{\sin(100\pi t)}{20\pi}$$

Vérification : $F'(t) = \frac{100\pi \cos(100\pi t)}{20\pi} = 5 \cos(100\pi t)$.

Multiplier par la pulsation au lieu de diviser donnerait $500\pi \sin(100\pi t)$, dont la dérivée vaut $50\,000\pi^2 \cos(100\pi t)$: une erreur d'un facteur énorme, que la vérification détecte immédiatement.

Réponse. $F(t) = \frac{\sin(100\pi t)}{20\pi}$.

Correction de l'exercice 8 - Avec un sinus

Pour $\sin(\omega t)$, une primitive est $-\frac{\cos(\omega t)}{\omega}$, car $(-\cos(\omega t))' = \omega \sin(\omega t)$. Avec $\omega = 4$ et le coefficient 3 :

$$F(t) = 3 \times \left(-\frac{\cos(4t)}{4} \right) = -\frac{3 \cos(4t)}{4}$$

Vérification : $F'(t) = -\frac{3}{4} \times (-4 \sin(4t)) = 3 \sin(4t)$.

Le double piège est ici le signe moins **et** la division par ω : $\frac{3 \cos(4t)}{4}$ ou $-3 \cos(4t)$ ne conviennent pas, comme le montre la dérivation.

Réponse. $F(t) = -\frac{3 \cos(4t)}{4}$.

Correction de l'exercice 9 - Deux termes trigonométriques

On primitive chaque composante séparément.

— $2 \cos(3t)$: une primitive de $\cos(3t)$ est $\frac{\sin(3t)}{3}$, d'où $\frac{2 \sin(3t)}{3}$.

— $-\sin(2t)$: une primitive de $\sin(2t)$ est $-\frac{\cos(2t)}{2}$; avec le signe moins de l'énoncé, on obtient $+\frac{\cos(2t)}{2}$.

$$F(t) = \frac{2 \sin(3t)}{3} + \frac{\cos(2t)}{2}$$

Vérification : $\left(\frac{2 \sin(3t)}{3}\right)' = 2 \cos(3t)$ et $\left(\frac{\cos(2t)}{2}\right)' = -\sin(2t)$. Deux signes moins se compensent dans le second terme : c'est là que se glissent les erreurs.

Réponse. $F(t) = \frac{2 \sin(3t)}{3} + \frac{\cos(2t)}{2}$.

Correction de l'exercice 10 - Avec une condition initiale

On commence par la primitive générale : $3x^2$ donne x^3 et -2 donne $-2x$, donc $F(x) = x^3 - 2x + C$.

La condition $F(1) = 5$ fixe la constante :

$$1 - 2 + C = 5 \Rightarrow C = 6$$

d'où $F(x) = x^3 - 2x + 6$.

Vérification : $F'(x) = 3x^2 - 2 = f(x)$ et $F(1) = 1 - 2 + 6 = 5$. Parmi toutes les primitives de f , qui diffèrent d'une constante, une seule passe par le point $(1 ; 5)$: la condition initiale la rend unique.

Réponse. $F(x) = x^3 - 2x + 6$.

Correction de l'exercice 11 - Une seconde condition initiale

La primitive générale de $4x + 1$ est $F(x) = 2x^2 + x + C$. On impose $F(2) = 0$:

$$8 + 2 + C = 0 \Rightarrow C = -10$$

donc $F(x) = 2x^2 + x - 10$.

Vérification : $F'(x) = 4x + 1$ et $F(2) = 8 + 2 - 10 = 0$. Graphiquement, la courbe de F passe par le point $(2 ; 0)$. La constante obtenue est négative, ce qui est fréquent : rien n'impose qu'elle soit positive.

Réponse. $F(x) = 2x^2 + x - 10$.

Correction de l'exercice 12 - Condition initiale sur un signal

Une primitive de $\sin(2t)$ est $-\frac{\cos(2t)}{2}$; avec le coefficient 6, la primitive générale est $F(t) = -3 \cos(2t) + C$.

En $t = 0$, $\cos 0 = 1$, donc $F(0) = -3 + C$. La condition $F(0) = 1$ donne $C = 4$:

$$F(t) = -3 \cos(2t) + 4$$

Vérification : $F'(t) = -3 \times (-2 \sin(2t)) = 6 \sin(2t)$, et $F(0) = -3 + 4 = 1$. Comme $\cos(2t)$ varie entre -1 et 1 , $F(t)$ varie entre 1 et 7 : l'oubli de la constante aurait donné un signal centré sur 0 au lieu de 4 .

Réponse. $F(t) = -3 \cos(2t) + 4$.

Correction de l'exercice 13 - Reconnaître une primitive

Pour savoir si F est une primitive de f , on la dérive et on compare à f .

— $F_1'(x) = 3x^2 + 1 = f(x)$: F_1 est une primitive.

— $F_2'(x) = 6x \neq f(x)$: F_2 n'est **pas** une primitive ; c'est en fait f elle-même.

— $F_3'(x) = 3x^2 + 1 = f(x)$: F_3 **est** une primitive.

$$F_1(x) - F_3(x) = 7$$

Les deux primitives trouvées diffèrent d'une constante, comme le prévoit le cours. Le piège consiste à confondre une fonction et sa primitive : F_2 ressemble à f parce qu'elle **est** f .

Réponse. F_1 et F_3 ; F_2 n'en est pas une.

Correction de l'exercice 14 - Deux primitives d'une même fonction

a) $F'(x) = 2x + 3$ et $G'(x) = 2x + 3$: les deux fonctions ont la même dérivée, ce sont donc deux primitives de $f(x) = 2x + 3$.

b) On calcule la différence :

$$F(x) - G(x) = (x^2 + 3x + 1) - (x^2 + 3x - 4) = 5$$

Elle est **constante**, conformément au théorème du cours : deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante.

Graphiquement, la courbe de F est celle de G translatée de 5 vers le haut. Les deux courbes ont donc, en des points de même abscisse, des tangentes parallèles, de pente $2x + 3$.

Réponse. a) toutes deux ont pour dérivée $2x + 3$ · b) $F - G = 5$, une constante.

Correction de l'exercice 15 - Un débit à intégrer

a) Le débit est la dérivée du volume : V est donc une primitive de q . Terme à terme, $12t$ donne $6t^2$ et 30 donne $30t$, d'où $V(t) = 6t^2 + 30t + C$. La cuve étant vide à $t = 0$, $V(0) = C = 0$:

$$V(t) = 6t^2 + 30t$$

b) $V(10) = 600 + 300 = 900$ L.

Contrôle : le débit passe de $q(0) = 30$ à $q(10) = 150$ L/min. Le débit moyen vaut $\frac{900}{10} = 90$ L/min, exactement la moyenne de 30 et 150, ce qui est attendu pour un débit affine.

Réponse. a) $V(t) = 6t^2 + 30t$ · b) 900 litres.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : de l'accélération à la position

a) La vitesse est une primitive de l'accélération : $v(t) = 2t + C$, et $v(0) = 3$ donne $C = 3$, soit $v(t) = 2t + 3$.

b) La position est une primitive de la vitesse : $x(t) = t^2 + 3t + C'$, et $x(0) = 5$ donne $C' = 5$:

$$x(t) = t^2 + 3t + 5$$

c) $v(4) = 8 + 3 = 11$ m/s et $x(4) = 16 + 12 + 5 = 33$ m : le chariot a parcouru 28 m.

d) $2t + 3 = 15$ donne $t = 6$ s ; le chariot est alors en $x(6) = 36 + 18 + 5 = 59$ m.

Contrôle : la vitesse étant affine, sa moyenne sur $[0 ; 6]$ vaut $\frac{3+15}{2} = 9$ m/s ; en 6 s, le chariot parcourt 54 m et arrive en $5 + 54 = 59$ m.

Réponse. a) $v(t) = 2t + 3$ · b) $x(t) = t^2 + 3t + 5$ · c) 11 m/s et 33 m · d) à $t = 6$ s, en $x = 59$ m.