

Plaquette 3 - Remonter une grandeur physique

Primitives — Première STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Les couples dérivée / primitive de la filière.

On connaît	On cherche	Relation
accélération $a(t)$	vitesse $v(t)$	$v' = a$
vitesse $v(t)$	position $x(t)$	$x' = v$
débit $q(t)$	volume $V(t)$	$V' = q$
intensité $i(t)$	charge $q(t)$	$q' = i$
puissance $p(t)$	énergie $W(t)$	$W' = p$

La méthode, toujours la même.

1. Identifier la fonction connue et celle à trouver. 2. Chercher la primitive **générale**, avec la constante C . 3. Utiliser la **condition initiale** (valeur à $t = 0$, cuve vide, départ à l'arrêt...) pour déterminer C . 4. Écrire la fonction complète, puis répondre à la question posée.

Cas particuliers utiles.

— **Accélération constante** a , départ à v_0 et x_0 :

$$v(t) = at + v_0 \quad x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

— **Grandeur affine** : la valeur moyenne sur $[0; T]$ est la moyenne des valeurs extrêmes, ce qui donne un contrôle rapide.

Unités. Primitiver **multiplie** par l'unité de la variable : des L/min primitivés en minutes donnent des litres, des watts primitivés en secondes donnent des joules.

⚠ Sans condition initiale, le problème a une infinité de réponses : toujours chercher dans l'énoncé la phrase qui fixe la valeur de départ.

Correction de l'exercice 1 - Vitesse constante

La vitesse est la dérivée de la position, donc x est une primitive de v . La primitive de la constante 4 est $4t$, d'où $x(t) = 4t + C$. La position de départ fixe la constante : $x(0) = C = 12$.

$$x(t) = 4t + 12$$

À $t = 7$ s : $x(7) = 28 + 12 = 40$ m.

Contrôle : à 4 m/s pendant 7 s, le mobile parcourt bien 28 m, qui s'ajoutent aux 12 m de départ. La constante d'intégration a ici un sens physique : c'est la position initiale.

Réponse. $x(t) = 4t + 12$ et $x(7) = 40$ m.

Correction de l'exercice 2 - Accélération constante

a) La vitesse est une primitive de l'accélération : la constante 3 donne $v(t) = 3t + C$. Le véhicule démarre à l'arrêt, $v(0) = 0$, donc $C = 0$ et $v(t) = 3t$.

b) La position est une primitive de la vitesse : $3t$ donne $\frac{3t^2}{2}$, et $x(0) = 0$ annule la constante :

$$x(t) = 1,5t^2$$

On retrouve la formule de physique $x = \frac{1}{2}at^2$ avec $a = 3$.

Contrôle : après 10 s, $v = 30$ m/s et $x = 150$ m. La vitesse moyenne vaut $\frac{0 + 30}{2} = 15$ m/s, et $15 \times 10 = 150$ m.

Réponse. a) $v(t) = 3t$ · b) $x(t) = 1,5t^2$.

Correction de l'exercice 3 - Un freinage

a) Le train freine : l'accélération vaut $a = -1,5$ m/s². Sa primitive est $-1,5t$, et $v(0) = 30$ donne $v(t) = -1,5t + 30$. Le train s'arrête quand $v(t) = 0$, soit $1,5t = 30$ et $t = 20$ s.

b) La position, comptée depuis le début du freinage, est une primitive de v nulle en 0 :

$$x(t) = -0,75t^2 + 30t \quad x(20) = -300 + 600 = 300 \text{ m}$$

Contrôle : la vitesse décroît linéairement de 30 à 0, sa moyenne vaut 15 m/s, et $15 \times 20 = 300$ m. C'est bien l'ordre de grandeur d'une distance de freinage ferroviaire.

Réponse. a) $v(t) = -1,5t + 30$, arrêt à $t = 20$ s · b) 300 m.

Correction de l'exercice 4 - Un débit variable

a) V est une primitive du débit : 20 donne $20t$ et $-0,5t$ donne $-0,25t^2$. La cuve étant vide au départ, la constante est nulle :

$$V(t) = 20t - 0,25t^2$$

b) $V(20) = 400 - 0,25 \times 400 = 400 - 100 = 300$ L.

Contrôle : le débit passe de 20 L/min à $q(20) = 10$ L/min ; il est affine, donc son débit moyen vaut $\frac{20 + 10}{2} = 15$ L/min, et $15 \times 20 = 300$ L.

Réponse. a) $V(t) = 20t - 0,25t^2$ · b) 300 litres.

Correction de l'exercice 5 - Quand le remplissage s'arrête

Le débit s'annule quand $20 - 0,5t = 0$, soit $t = 40$ min. Le volume vaut alors

$$V(40) = 20 \times 40 - 0,25 \times 1600 = 800 - 400 = 400 \text{ L}$$

Comme $V' = q$, le volume augmente tant que le débit est positif, c'est-à-dire jusqu'à $t = 40$: V y atteint son **maximum**. Au-delà, le débit deviendrait négatif, ce qui n'a pas de sens pour un remplissage : le modèle cesse d'être valable.

Contrôle : $V(30) = 600 - 225 = 375$ L et $V(50) = 1000 - 625 = 375$ L, tous deux inférieurs à 400 L.

Réponse. À $t = 40$ min, avec 400 litres dans la cuve.

Correction de l'exercice 6 - Charge d'un condensateur

a) L'intensité est la dérivée de la charge : $q'(t) = 0,02$, donc $q(t) = 0,02t + C$. Le condensateur étant déchargé au départ, $C = 0$ et $q(t) = 0,02t$.

b) Après 30 s :

$$q(30) = 0,02 \times 30 = 0,6 \text{ C}$$

Les unités sont cohérentes : un ampère pendant une seconde transporte un coulomb.

Pour un condensateur de $100\text{ }\mu\text{F}$, la tension atteindrait $U = \frac{q}{C} = \frac{0,6}{10^{-4}} = 6\,000\text{ V}$. Un courant constant fait monter la tension sans limite : en pratique, un circuit de charge limite toujours ce courant.

Réponse. a) $q(t) = 0,02t$ · b) 0,6 coulomb.

Correction de l'exercice 7 - Énergie consommée

a) La puissance est la dérivée de l'énergie, donc W est une primitive de p : 500 donne $500t$ et $20t$ donne $10t^2$. En comptant l'énergie depuis $t = 0$, la constante est nulle :

$$W(t) = 500t + 10t^2$$

b) $W(60) = 30\,000 + 36\,000 = 66\,000\text{ J}$, soit 66 kJ.

Contrôle : la puissance passe de 500 W à $500 + 1\,200 = 1\,700\text{ W}$; elle est affine, sa moyenne vaut 1 100 W, et $1\,100 \times 60 = 66\,000\text{ J}$.

Réponse. a) $W(t) = 500t + 10t^2$ · b) 66 kJ.

Correction de l'exercice 8 - Une chute libre

a) Avec un axe orienté vers le haut, l'accélération vaut -10 m/s^2 . Sa primitive, nulle en 0 (objet lâché sans vitesse), donne $v(t) = -10t$. La hauteur est une primitive de v , égale à 45 en 0 :

$$h(t) = -5t^2 + 45$$

b) L'objet touche le sol quand $h(t) = 0$: $5t^2 = 45$, $t^2 = 9$, et $t = 3\text{ s}$ (on écarte la solution négative). La vitesse vaut alors $v(3) = -30\text{ m/s}$: son signe traduit la descente, son intensité est 30 m/s, soit $30 \times 3,6 = 108\text{ km/h}$.

Contrôle : la vitesse moyenne vaut $\frac{0+30}{2} = 15\text{ m/s}$, et en 3 s l'objet descend bien de 45 m.

Réponse. a) $v(t) = -10t$ et $h(t) = -5t^2 + 45$ · b) 3 s, impact à 30 m/s (soit 108 km/h).

Correction de l'exercice 9 - Un compteur qui ne part pas de zéro

a) V est une primitive du débit : $8t$ donne $4t^2$. Le compteur affiche déjà 1 250 L, donc la constante n'est **pas** nulle :

$$V(t) = 4t^2 + 1\,250$$

b) On résout $4t^2 + 1\,250 = 2\,250$, soit $4t^2 = 1\,000$ et $t^2 = 250$. La solution positive est $t = \sqrt{250} \approx 15,81\text{ min}$.

Vérification : $4 \times 250 = 1\,000\text{ L}$ ajoutés. Le débit vaut alors $8 \times 15,81 \approx 126,5\text{ L/min}$. Le point de méthode est de lire l'état initial dans l'énoncé avant de fixer la constante.

Réponse. a) $V(t) = 4t^2 + 1\,250$ · b) environ 15,81 min.

Correction de l'exercice 10 - Deux phases successives

On traite les deux phases successivement, la fin de la première donnant le départ de la seconde.

Phase 1. Depuis l'arrêt, avec $a = 2\text{ m/s}^2$: $v(t) = 2t$ et $x(t) = t^2$. En 5 s, le chariot parcourt 25 m et atteint $v(5) = 10\text{ m/s}$.

Phase 2. À vitesse constante 10 m/s pendant 10 s, il parcourt $10 \times 10 = 100$ m.

$$d = 25 + 100 = 125 \text{ m}$$

La vitesse moyenne sur les 15 s vaut $\frac{125}{15} \approx 8,33$ m/s : elle est bien inférieure à la vitesse maximale de 10 m/s, puisque le chariot a roulé moins vite pendant la phase d'accélération.

Réponse. 125 m au total (25 m puis 100 m).

Correction de l'exercice 11 - Une intensité variable

a) Une primitive de $\cos(100\pi t)$ est $\frac{\sin(100\pi t)}{100\pi}$. Avec le coefficient 0,5 :

$$q(t) = \frac{0,5 \sin(100\pi t)}{100\pi} + C = \frac{\sin(100\pi t)}{200\pi} + C$$

Comme $\sin 0 = 0$, la condition $q(0) = 0$ donne $C = 0$.

b) Le sinus vaut au plus 1, donc la charge maximale vaut $\frac{1}{200\pi} \approx 1,59 \times 10^{-3}$ C, soit environ 1,59 mC. Elle est atteinte quand $100\pi t = \frac{\pi}{2}$, soit $t = 0,005$ s.

La charge oscille sans s'accumuler, contrairement à un courant continu, qui la ferait croître indéfiniment.

Réponse. a) $q(t) = \frac{\sin(100\pi t)}{200\pi}$ · b) environ 1,59 mC.

Correction de l'exercice 12 - Retrouver la condition initiale

Le débit étant constant, le volume est de la forme $V(t) = 15t + C$, où C est le volume à $t = 0$. L'information porte ici sur l'instant 12 min :

$$V(12) = 15 \times 12 + C = 400 \Rightarrow 180 + C = 400 \Rightarrow C = 220$$

La cuve contenait donc déjà 220 L au départ, et $V(t) = 15t + 220$.

Vérification : $V(12) = 180 + 220 = 400$ L. La condition qui fixe la constante peut porter sur n'importe quel instant, pas seulement sur $t = 0$.

Réponse. La cuve contenait déjà 220 litres.

Correction de l'exercice 13 - Un modèle qui cesse d'être valable

a) V est une primitive du débit : 25 donne $25t$ et $-t$ donne $-\frac{t^2}{2}$. La cuve est vide au départ, donc $V(t) = 25t - 0,5t^2$.

b) Le volume augmente tant que le débit est positif, c'est-à-dire jusqu'à $25 - t = 0$, soit $t = 25$ min. Il atteint alors son maximum :

$$V(25) = 625 - 312,5 = 312,5 \text{ L}$$

Comme $312,5 < 500$, la cuve **ne déborde jamais** : elle n'est remplie qu'à 62,5 %. Au-delà de 25 min, le débit deviendrait négatif, ce qui n'a pas de sens ici : le modèle n'est valable que pour $0 \leq t \leq 25$.

Réponse. a) $V(t) = 25t - 0,5t^2$ · b) jamais : le volume plafonne à 312,5 L à $t = 25$ min.

Correction de l'exercice 14 - Comparer deux remplissages

a) Les deux cuves sont vides au départ : les constantes sont nulles. Une primitive de 30 est $30t$, une primitive de $4t$ est $2t^2$, d'où $V_1(t) = 30t$ et $V_2(t) = 2t^2$.

b) On résout $V_1(t) = V_2(t)$ en factorisant :

$$30t = 2t^2 \Leftrightarrow 2t(t - 15) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ ou } t = 15$$

L'instant $t = 0$, où les deux cuves sont vides, est sans intérêt : elles contiennent la même quantité à $t = 15$ min, soit $30 \times 15 = 450$ L (contrôle : $2 \times 225 = 450$).

Avant 15 min, la première cuve est en avance ; après, la seconde la dépasse, car son débit continue de croître.

Réponse. a) $V_1(t) = 30t$ et $V_2(t) = 2t^2$ · b) à $t = 15$ min, avec 450 L chacune.

Correction de l'exercice 15 - Lire des unités

Primitiver par rapport au temps revient à accumuler une grandeur au cours du temps : l'unité de la primitive est celle de la fonction **multipliée** par celle de la variable.

- a) Un débit en m^3/h multiplié par des heures donne des m^3 : un volume.
- b) Une puissance en watts multipliée par des secondes donne des joules : une énergie, car 1 J correspond à 1 W pendant 1 s.
- c) Une vitesse en km/h multipliée par des heures donne des kilomètres : une distance.

$$\text{unité de } F = \text{unité de } f \times \text{unité de la variable}$$

Ce test d'unités détecte les erreurs de modélisation : primitiver une puissance en watts avec un temps en heures donne des wattheures, pas des joules.

Réponse. a) des m^3 · b) des joules · c) des kilomètres.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : un cycle de production

- a) Le compteur N est une primitive du débit : 60 donne $60t$ et $8t$ donne $4t^2$. Il affiche 150 au début du poste, d'où

$$N(t) = 4t^2 + 60t + 150$$

- b) $N(8) = 256 + 480 + 150 = 886$: le compteur affiche 886, soit 736 pièces produites pendant le poste. **Contrôle** : le débit passe de 60 à 124 pièces/h, sa moyenne vaut 92, et $92 \times 8 = 736$.
- c) On résout $4t^2 + 60t + 150 = 500$ par essais : $N(4) = 454$ et $N(4,5) = 501$, puis $N(4,49) \approx 500,04$. Le compteur atteint 500 vers 4,49 h, soit environ 4 h 29 min.
- d) La recette vaut $736 \times 2,40 = 1\,766,40$ € et le coût $8 \times 85 = 680$ €, d'où un bénéfice de 1 086,40 €, environ 135,80 € par heure. Le seuil de rentabilité est de $\frac{85}{2,40} \approx 35,4$ pièces par heure : le débit minimal de 60 pièces/h le dépasse largement.

Réponse. a) $N(t) = 4t^2 + 60t + 150$ · b) 886 au compteur, soit 736 pièces produites · c) environ 4 h 29 · d) 1 086,40 € de bénéfice.