

Plaquette 4 - Méthode d'Euler pas à pas

Primitives — Première STI2D

Exercices

Méthode

Quand aucune primitive ne se calcule à la main, on **avance de proche en proche** : on part d'un point connu, on suit la tangente sur un petit pas, et on recommence. C'est la méthode d'Euler, le premier algorithme numérique de la filière.

Exercice 1 - Un premier pas

On considère $y' = 2x$ avec $y(0) = 1$ et un pas $h = 0,5$.
Calculer y_1 .

Exercice 2 - Trois pas d'Euler

Avec $y' = 2x$, $y(0) = 1$ et $h = 0,5$, dresser le tableau jusqu'à $x = 1,5$.

Exercice 3 - L'effet du pas

Reprendre $y' = 2x$ avec $y(0) = 1$, mais un pas $h = 0,25$, jusqu'à $x = 1$.
Comparer à la valeur obtenue avec $h = 0,5$.

Exercice 4 - Une équation en y

On considère $y' = 0,5y$ avec $y(0) = 100$ et $h = 1$.
Calculer y_1 , y_2 et y_3 .

Exercice 5 - Une décroissance

On considère $y' = -0,2y$ avec $y(0) = 500$ et $h = 1$.
Calculer les trois premières valeurs.

Exercice 6 - Refroidissement

Une pièce à 200 °C refroidit dans un air à 20 °C selon $\theta' = -0,1(\theta - 20)$, t en minutes.
Calculer les températures aux trois premières minutes, avec $h = 1$.

Exercice 7 - Un pas plus fin sur le refroidissement

Même refroidissement, mais avec $h = 0,5$ min. Calculer la température à $t = 1$ min et comparer.

Exercice 8 - Charge d'un condensateur

La tension d'un condensateur suit $u' = 0,5(12 - u)$, avec $u(0) = 0$ V et $h = 0,5$ s.
Calculer u aux trois premiers pas.

Exercice 9 - Compléter un tableau

Compléter ce tableau d'Euler pour $y' = x + y$, avec $y(0) = 1$ et $h = 0,2$.

n	x	y	y'
0	0	1	?
1	0,2	?	?
2	0,4	?	—

Exercice 10 - Corriger une erreur d'ordre

Un élève calcule, pour $y' = 0,4y$ avec $y_0 = 50$ et $h = 1$: « $y_1 = 50 + 1 \times 0,4 \times y_1$ ».
Expliquer l'erreur et donner le bon calcul.

Exercice 11 - Deux pas pour comparer

Pour $y' = y$ avec $y(0) = 1$, calculer $y(1)$ par Euler avec $h = 1$, puis avec $h = 0,5$.

Exercice 12 - Une population

Une population suit $p' = 0,03p$, avec $p(0) = 20\,000$ et un pas d'un an.
Calculer la population après trois ans.

Exercice 13 - Estimer l'instant d'un seuil

Avec le refroidissement $\theta' = -0,1(\theta - 20)$ partant de 200 °C et $h = 1$ min, estimer au bout de combien de minutes la pièce passe sous 100 °C.

Exercice 14 - Quand Euler est exact

Appliquer Euler à $y' = 3$ avec $y(0) = 2$ et $h = 0,5$, sur quatre pas.
Que remarque-t-on ?

Exercice 15 - Estimer le sens de l'erreur

Pour $y' = y$ avec $y(0) = 1$, Euler donne $y(1) \approx 2$ alors que la valeur exacte vaut environ $2,718$.
Expliquer pourquoi Euler sous-estime ici.

Exercice 16 - Synthèse : la charge complète d'un condensateur

Un condensateur se charge selon $u' = 2(24 - u)$, avec $u(0) = 0$ V et un pas $h = 0,1$ s.
a) Calculer u aux quatre premiers pas.

- b) Montrer que l'écart à 24 V est une suite géométrique et donner sa raison.
- c) En déduire u à $t = 1$ s.
- d) À quel instant la tension atteint-elle 90 % de 24 V ?