

MATHÉMATIQUES

Primitives

Première STI2D

Primitive • Constante d'intégration • Condition initiale • Polynômes
Signaux sinusoïdaux • Équation $y' = f(t)$ • Méthode d'Euler • Pas

Repères du programme

Ce cours suit le **programme de l'enseignement de spécialité physique-chimie et mathématiques, classe de première STI2D** (BO spécial n°8 du 25 juillet 2019), partie mathématiques, « Primitives ». Il couvre :

- définition d'une primitive ; deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante ;
- primitives des fonctions polynômes et des fonctions $t \mapsto A \cos(\omega t + \varphi)$, $t \mapsto A \sin(\omega t + \varphi)$;
- primitive vérifiant une condition initiale ; équation $y' = f(t)$;
- **méthode d'Euler** pour construire une approximation de la solution.

Objectif : déterminer les primitives d'un polynôme et d'un signal sinusoïdal, choisir celle qui vérifie une condition initiale, et approcher une solution de $y' = f(t)$ par la méthode d'Euler.

Table des matières

1	Primitives d'une fonction	3
2	Primitives usuelles	3
3	Équation $y' = f(t)$ et mouvement	4
4	Méthode d'Euler	5
5	Erreurs classiques	6
6	Fiche de synthèse	6
7	Exercices d'application	6
8	Corrigés des exercices	6

1. Primitives d'une fonction

Primitive

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Une **primitive** de f sur I est une fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.

$F(x) = x^3 + 2x$ est une primitive de $f(x) = 3x^2 + 2$ sur $\mathbb{R}$, car $F'(x) = 3x^2 + 2$. Mais $G(x) = x^3 + 2x + 7$ en est une aussi.

Toutes les primitives

Si F est une primitive de f sur un intervalle I , les primitives de f sur I sont les fonctions $x \mapsto F(x) + C$, où C est une constante réelle. Pour une condition initiale donnée ($F(x_0) = y_0$), il en existe une seule.

Démonstration. Si F et G sont deux primitives de f , alors $(G - F)' = f - f = 0$: la fonction $G - F$ a une dérivée nulle sur un intervalle, elle est constante.

2. Primitives usuelles

Tableau des primitives

f	une primitive F
k (constante)	kx
x^n ($n \geq 1$ entier)	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$A \cos(\omega t + \varphi)$	$\frac{A}{\omega} \sin(\omega t + \varphi)$
$A \sin(\omega t + \varphi)$	$-\frac{A}{\omega} \cos(\omega t + \varphi)$

Une primitive d'une somme est la somme des primitives, et une primitive de kf est kF .

Vérifier une primitive

On dérive F : on doit retrouver f . C'est le moyen le plus sûr de contrôler un facteur $\frac{1}{n+1}$ ou $\frac{1}{\omega}$.

Polynôme et condition initiale

$f(x) = 6x^2 - 4x + 1$: les primitives sont $F(x) = 2x^3 - 2x^2 + x + C$. Si l'on impose $F(1) = 3$: $2 - 2 + 1 + C = 3$, donc $C = 2$ et $F(x) = 2x^3 - 2x^2 + x + 2$.

Charge d'un condensateur

L'intensité est la dérivée de la charge : $q' = i$. Si $i(t) = 0,2 \cos(100\pi t)$ (en ampères) et $q(0) = 0$, alors

$$q(t) = \frac{0,2}{100\pi} \sin(100\pi t) + C, \quad q(0) = C = 0, \quad q(t) = \frac{0,002}{\pi} \sin(100\pi t) \text{ coulombs.}$$

3. Équation $y' = f(t)$ et mouvement**Résoudre $y' = f(t)$**

Les solutions de l'équation $y' = f(t)$ sont les primitives de f ; la condition initiale $y(t_0) = y_0$ fixe la constante.

Freinage

Un véhicule roulant à 20 m/s freine avec une décélération constante de 4 m/s². Sa vitesse vérifie $v'(t) = -4$ et $v(0) = 20$, donc $v(t) = -4t + 20$. Sa position, avec $x(0) = 0$, vérifie $x' = v$, d'où $x(t) = -2t^2 + 20t$. Il s'arrête quand $v(t) = 0$, soit à $t = 5$ s, après $x(5) = -50 + 100 = 50$ m.

4. Méthode d'Euler

Principe

Quand on ne connaît pas de primitive, on construit point par point une approximation de la solution de $y' = f(t)$, $y(t_0) = y_0$. On choisit un **pas** h et l'on utilise l'approximation affine $y(t+h) \approx y(t) + h y'(t)$:

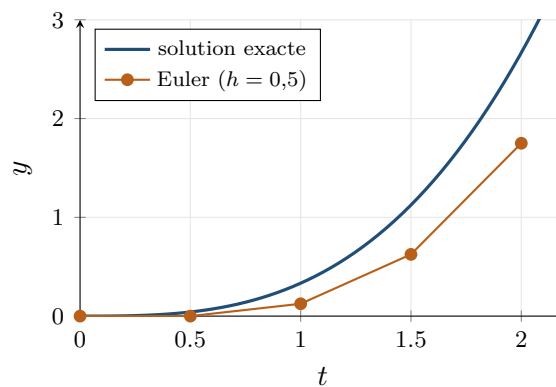
$$t_{k+1} = t_k + h \quad y_{k+1} = y_k + h f(t_k)$$

Plus le pas est petit, meilleure est l'approximation (et plus il y a de calculs).

$y' = t^2$, $y(0) = 0$, pas $h = 0,5$

t_k	0	0,5	1	1,5	2
y_k	0	0	0,125	0,625	1,75

Par exemple $y_3 = y_2 + 0,5 \times 1^2 = 0,125 + 0,5 = 0,625$. La solution exacte est $y = \frac{t^3}{3}$, qui vaut $\frac{8}{3} \approx 2,67$ en $t = 2$: avec ce pas, l'approximation est grossière.



La méthode d'Euler avance par segments de tangente ; l'erreur s'accumule à chaque pas.

Algorithme

```
def euler(f, t0, y0, h, n):
    t, y = t0, y0
    for k in range(n):
        y = y + h * f(t)
        t = t + h
    return y

def f(t):
    return t**2

print(euler(f, 0, 0, 0.1, 20))    # environ 2.47
```

Avec un pas de 0,1 (20 pas), on obtient 2,47, plus proche de $\frac{8}{3} \approx 2,67$.

5. Erreurs classiques

À éviter

- Oublier la constante C , puis oublier de la déterminer avec la condition initiale.
- Oublier le facteur $\frac{1}{n+1}$: une primitive de x^2 est $\frac{x^3}{3}$, pas x^3 .
- Oublier le facteur $\frac{1}{\omega}$: une primitive de $\cos(\omega t)$ est $\frac{1}{\omega} \sin(\omega t)$.
- Se tromper de signe : une primitive de $\sin$ est $-\cos$.

6. Fiche de synthèse

Primitive	$F' = f$; toutes les primitives : $F + C$
Polynômes	$x^n \rightarrow \frac{x^{n+1}}{n+1}$; $k \rightarrow kx$
Signaux	$A \cos(\omega t + \varphi) \rightarrow \frac{A}{\omega} \sin(\omega t + \varphi)$; $A \sin(\omega t + \varphi) \rightarrow -\frac{A}{\omega} \cos(\omega t + \varphi)$
Condition initiale	$F(x_0) = y_0$ fixe C
Euler	$y_{k+1} = y_k + h f(t_k)$; pas plus petit, meilleure approximation

7. Exercices d'application

Exercice 1 – Primitives

Déterminer une primitive de $f(x) = 4x^3 - 6x + 5$ et de $g(t) = 3 \cos(2t)$.

Exercice 2 – Condition initiale

Déterminer la primitive F de $f(x) = 2x + 3$ telle que $F(0) = -1$.

Exercice 3 – Signal

Déterminer la primitive de $u(t) = 10 \sin(50t)$ qui s'annule en 0.

Exercice 4 – Euler

On considère $y' = 2t$ avec $y(0) = 1$. Avec un pas $h = 0,5$, calculer les valeurs approchées de $y(0,5)$ et $y(1)$, puis comparer à la solution exacte $y = t^2 + 1$.

8. Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

Corrigé. $F(x) = x^4 - 3x^2 + 5x$; $G(t) = \frac{3}{2} \sin(2t)$. Contrôle : $G'(t) = \frac{3}{2} \times 2 \cos(2t) = 3 \cos(2t)$.

Corrigé de l'exercice 2

Corrigé. $F(x) = x^2 + 3x + C$ et $F(0) = C = -1$: $F(x) = x^2 + 3x - 1$.

Corrigé de l'exercice 3

Corrigé. $U(t) = -\frac{10}{50} \cos(50t) + C = -0,2 \cos(50t) + C$. $U(0) = -0,2 + C = 0$, donc $C = 0,2$:
 $U(t) = 0,2 - 0,2 \cos(50t)$.

Corrigé de l'exercice 4

Corrigé. $y_1 = 1 + 0,5 \times 0 = 1$; $y_2 = 1 + 0,5 \times 1 = 1,5$. Valeurs exactes : 1,25 et 2.