

Plaquette 3 - Arbres pondérés et probabilités totales

Probabilités conditionnelles et indépendance — Première STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Les trois règles de l'arbre.

Règle	Écriture
un chemin se multiplie	$P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D)$
les branches d'un nœud font 1	$P_A(D) + P_A(\overline{D}) = 1$
les chemins d'un même événement s'additionnent	probabilités totales

Probabilités totales, deux branches.

$$P(D) = P(A) \times P_A(D) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(D)$$

Trois branches ou plus. Même principe : on additionne tous les chemins qui aboutissent à D .

Remonter l'arbre.

$$P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)}$$

Le numérateur est **un** chemin, le dénominateur la **somme** des chemins.

Au moins un. Pour n épreuves indépendantes de probabilité de succès p :

$$P(\text{au moins un échec}) = 1 - p^n$$

⚠ Les probabilités portées **sur** les branches sont conditionnelles ; celles écrites **au bout** des chemins ne le sont pas.

Correction de l'exercice 1 - Construire l'arbre

On note A « la pièce vient de A », B « elle vient de B » et D « elle est défectueuse ».

a) Le **premier niveau** porte les probabilités simples $P(A) = 0,7$ et $P(B) = 0,3$, de somme 1.

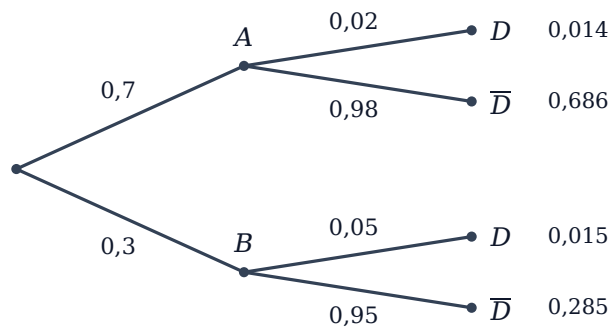
Le **second niveau** porte des probabilités **conditionnelles** : « 2 % de défauts chez A » signifie $P_A(D) = 0,02$. À chaque nœud, les branches ont pour somme 1 :

$$P_A(\overline{D}) = 1 - 0,02 = 0,98 \quad P_B(\overline{D}) = 1 - 0,05 = 0,95$$

b) La probabilité d'un chemin est le **produit** des branches parcourues :

$$P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D) = 0,7 \times 0,02 = 0,014$$

De même : $P(A \cap \bar{D}) = 0,7 \times 0,98 = 0,686$, $P(B \cap D) = 0,3 \times 0,05 = 0,015$ et $P(B \cap \bar{D}) = 0,3 \times 0,95 = 0,285$.



Fournisseur puis état de la pièce

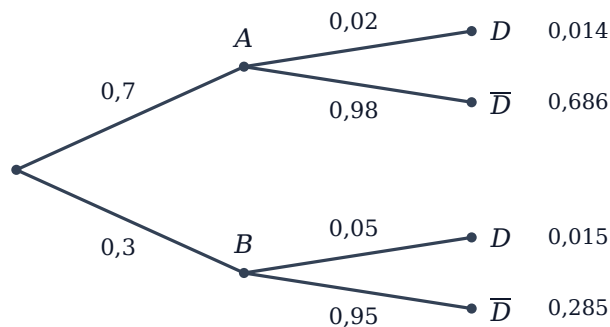
Contrôle. Les quatre chemins couvrent toutes les situations : $0,014 + 0,686 + 0,015 + 0,285 = 1$.

Réponse. a) 0,02 ; 0,98 ; 0,05 ; 0,95 — b) 0,014 ; 0,686 ; 0,015 ; 0,285.

Correction de l'exercice 2 - Probabilité totale de défaut

Une pièce défectueuse vient soit de A, soit de B : **deux chemins** de l'arbre aboutissent à D. Ils sont incompatibles, donc on **additionne** leurs probabilités (formule des probabilités totales) :

$$P(D) = P(A) \times P_A(D) + P(B) \times P_B(D)$$



Deux chemins mènent à D

On remplace par les valeurs :

$$P(D) = 0,7 \times 0,02 + 0,3 \times 0,05 = 0,014 + 0,015 = 0,029$$

L'atelier reçoit donc 2,9 % de pièces défectueuses.

Contrôle de vraisemblance. Le taux global est compris entre les deux taux, 2 % et 5 %, et plus proche de 2 % car A fournit la majorité des pièces.

Piège. La moyenne simple $\frac{2+5}{2} = 3,5$ % est fautive : elle oublie que les deux fournisseurs n'ont pas le même poids.

Réponse. $P(D) = 0,029$, soit 2,9 %.

Correction de l'exercice 3 - Remonter l'arbre

On connaît $P_A(D)$ (sur l'arbre) et l'on cherche $P_D(A)$: il faut **remonter** l'arbre, en revenant à la définition de la probabilité conditionnelle.

$$P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)}$$

a) Le numérateur est **un** chemin, $P(A \cap D) = 0,014$; le dénominateur est la **somme** des deux chemins menant à D , $P(D) = 0,029$ (exercice précédent).

$$P_D(A) = \frac{0,014}{0,029} \approx 0,483$$

b) De même :

$$P_D(B) = \frac{0,015}{0,029} \approx 0,517$$

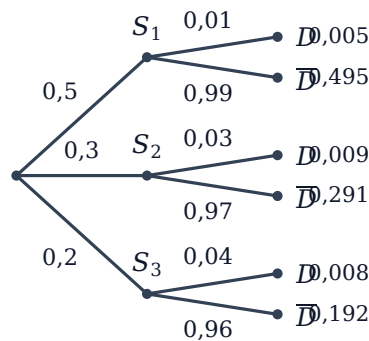
Contrôle. $P_D(A) + P_D(B) = 1$: une pièce défectueuse vient forcément de A ou de B.

Interprétation. B ne fournit que 30 % des pièces, mais plus de la moitié des pièces défectueuses : son taux de défaut, deux fois et demie plus élevé, l'emporte sur son faible volume.

Réponse. a) $P_D(A) \approx 0,483$ — b) $P_D(B) \approx 0,517$.

Correction de l'exercice 4 - Trois sites de production

On note S_1, S_2, S_3 les trois sites et D « la pièce est défectueuse ». Le premier niveau de l'arbre a **trois** branches, de somme $0,5 + 0,3 + 0,2 = 1$.



Trois sites au premier niveau

a) Chaque chemin vers D se calcule par le produit des branches :

$$P(S_1 \cap D) = 0,5 \times 0,01 = 0,005$$

$$P(S_2 \cap D) = 0,3 \times 0,03 = 0,009 \quad P(S_3 \cap D) = 0,2 \times 0,04 = 0,008$$

b) Les trois chemins sont incompatibles : on les additionne (probabilités totales).

$$P(D) = 0,005 + 0,009 + 0,008 = 0,022$$

Le taux global de défaut est de 2,2 %, bien compris entre 1 % et 4 %.

Réponse. a) 0,005 ; 0,009 ; 0,008 — b) $P(D) = 0,022$.

Correction de l'exercice 5 - L'origine la plus probable

On compare les probabilités $P_D(S_i)$, obtenues en remontant l'arbre :

$$P_D(S_i) = \frac{P(S_i \cap D)}{P(D)} \quad \text{avec } P(D) = 0,022$$

— site 1 : $\frac{0,005}{0,022} \approx 0,227$;

- site 2 : $\frac{0,009}{0,022} \approx 0,409$;
- site 3 : $\frac{0,008}{0,022} \approx 0,364$.

Contrôle. La somme vaut $\frac{0,005 + 0,009 + 0,008}{0,022} = 1$.

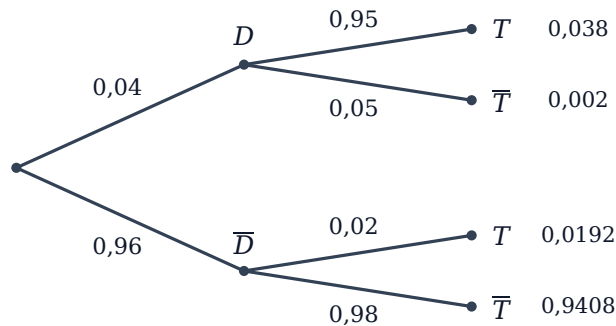
Une pièce défectueuse vient le plus probablement du **site 2** (environ 41 % des cas).

Remarque. Comme le dénominateur est le même, il suffit de comparer les numérateurs, c'est-à-dire les chemins : 0,009 est le plus grand. Le site 1 produit la moitié des pièces mais seulement 23 % des défauts, grâce à son faible taux de 1 %.

Réponse. Du site 2, avec $P_D(S_2) \approx 0,409$.

Correction de l'exercice 6 - Un test de contrôle

On note D « la pièce est défectueuse » et T « la pièce est signalée par le test ». L'énoncé donne $P(D) = 0,04$, $P_D(T) = 0,95$ (détection) et $P_{\bar{D}}(T) = 0,02$ (fausse alerte).



État réel de la pièce puis signalement

a) Une pièce est signalée par **deux chemins**, que l'on additionne :

$$P(T) = P(D) \times P_D(T) + P(\bar{D}) \times P_{\bar{D}}(T)$$

$$P(T) = 0,04 \times 0,95 + 0,96 \times 0,02 = 0,038 + 0,0192 = 0,0572$$

b) Les deux chemins n'ont pas le même sens :

- $D \cap T$, de probabilité 0,038 : les **vraies alertes** (pièce défectueuse et signalée) ;
- $\bar{D} \cap T$, de probabilité 0,0192 : les **fausses alertes** (pièce conforme signalée à tort).

Lecture. Environ 5,7 % des pièces sont signalées, dont un tiers à tort : les pièces conformes sont si nombreuses que 2 % d'entre elles pèsent lourd.

Réponse. a) $P(T) = 0,0572$ — b) 0,038 (vraies alertes) et 0,0192 (fausses alertes).

Correction de l'exercice 7 - Fiabilité de l'alerte

On remonte l'arbre de l'exercice précédent avec la définition :

$$P_T(D) = \frac{P(D \cap T)}{P(T)}$$

a) Avec $P(D \cap T) = 0,038$ et $P(T) = 0,0572$:

$$P_T(D) = \frac{0,038}{0,0572} \approx 0,664$$

Une pièce signalée n'est réellement défectueuse que dans environ deux cas sur trois.

b) Une pièce non signalée suit l'un des deux chemins menant à $\bar{T}$:

$$P(\overline{T}) = 0,04 \times 0,05 + 0,96 \times 0,98 = 0,002 + 0,9408 = 0,9428$$

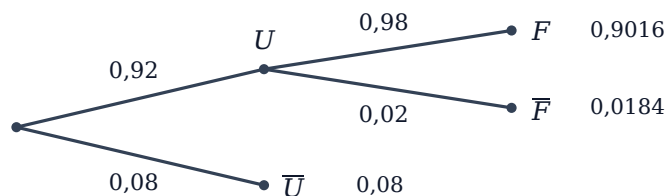
$$P_{\overline{T}}(\overline{D}) = \frac{0,9408}{0,9428} \approx 0,998$$

Bilan. Le test est très fiable quand il ne signale rien (99,8 % de pièces conformes), beaucoup moins quand il signale : on recontrôle donc les pièces signalées avant de les jeter.

Réponse. a) $P_T(D) \approx 0,664$ — b) $P_{\overline{T}}(\overline{D}) \approx 0,998$.

Correction de l'exercice 8 - Deux étapes successives

On note U « l'usinage réussit » et F « la finition réussit ». L'énoncé donne $P(U) = 0,92$ et $P_U(F) = 0,98$: la finition n'est faite que sur les pièces bien usinées, d'où une probabilité conditionnelle.



Si l'usinage échoue, la pièce est rebutée sans finition

a) Réussir les deux étapes correspond au chemin $U \rightarrow F$:

$$P(U \cap F) = P(U) \times P_U(F) = 0,92 \times 0,98 = 0,9016$$

b) Une pièce est rebutée si elle n'a pas réussi les deux étapes : c'est l'événement contraire.

$$P(\text{rebut}) = 1 - 0,9016 = 0,0984$$

Le taux de rebut est d'environ 9,8 %.

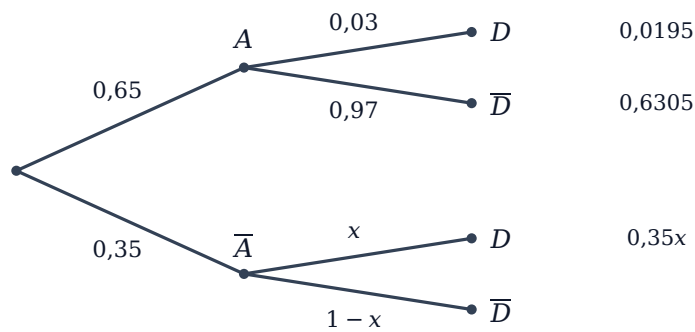
Contrôle par les chemins. Les rebuts proviennent de l'usinage (0,08) ou de la finition ($0,92 \times 0,02 = 0,0184$) : $0,08 + 0,0184 = 0,0984$.

Réponse. a) 0,9016 — b) environ 9,84 % de rebut.

Correction de l'exercice 9 - Compléter un arbre

On note $x = P_{\overline{A}}(D)$, la branche inconnue, et l'on écrit la formule des probabilités totales :

$$P(D) = P(A) \times P_A(D) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(D)$$



L'inconnue $x = P_{\bar{A}}(D)$

Avec $P(\bar{A}) = 1 - 0,65 = 0,35$:

$$0,05 = 0,65 \times 0,03 + 0,35x = 0,0195 + 0,35x$$

On isole x : $0,35x = 0,05 - 0,0195 = 0,0305$, donc

$$x = \frac{0,0305}{0,35} = \frac{61}{700} \approx 0,0871$$

Vérification. $0,0195 + 0,35 \times \frac{61}{700} = 0,0195 + 0,0305 = 0,05$.

Lecture. Le taux de défaut sous $\bar{A}$ (environ 8,7 %) est bien supérieur à celui sous A (3 %) : c'est cohérent, puisque le taux global 5 % dépasse 3 %.

Réponse. $P_{\bar{A}}(D) = \frac{61}{700} \approx 0,0871$.

Correction de l'exercice 10 - Multiplier, pas additionner

L'erreur. L'élève a **additionné** les deux probabilités. Or sur un arbre, la probabilité d'un chemin est le **produit** des branches :

$$P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D)$$

Le bon calcul.

$$P(A \cap D) = 0,7 \times 0,02 = 0,014$$

Comment repérer l'erreur sans calculer. $A \cap D$ est contenu dans A , donc $P(A \cap D) \leq P(A) = 0,7$. Le résultat 0,72 dépasse 0,7 : il est forcément faux.

Sens du résultat. 1,4 % des pièces viennent de A **et** sont défectueuses : c'est 2 % des 70 % de pièces de A , une proportion d'une proportion — d'où le produit.

Réponse. $P(A \cap D) = 0,7 \times 0,02 = 0,014$ (on multiplie le long d'un chemin).

Correction de l'exercice 11 - Somme des branches d'un nœud

a) Les branches issues d'un **même nœud** décrivent toutes les issues possibles à partir de ce nœud, sans recouvrement : leur somme vaut 1.

$$p = 1 - (0,3 + 0,45) = 1 - 0,75 = 0,25$$

La branche illisible vaut 0,25.

b) **Non.** Deux branches issues de nœuds **différents** portent des probabilités conditionnelles à des événements différents, par exemple $P_A(D)$ et $P_{\bar{A}}(D)$. Elles n'ont aucune raison d'avoir pour somme 1 : avec $P_A(D) = 0,02$ et $P_{\bar{A}}(D) = 0,05$, la somme vaut

0,07.

À retenir. Le complément à 1 se fait **nœud par nœud** : $P_A(\overline{D}) = 1 - P_A(D)$, jamais $P_{\overline{A}}(D) = 1 - P_A(D)$.

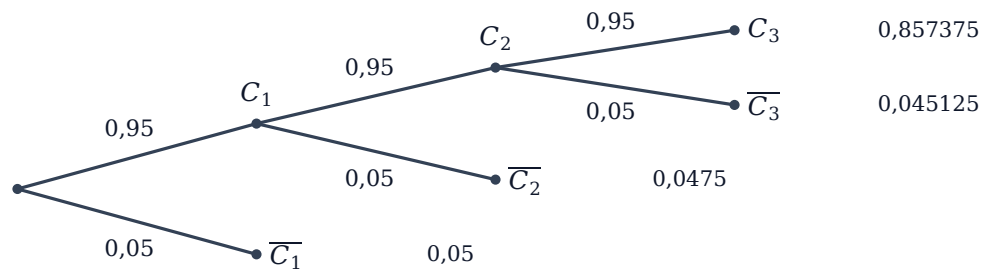
Réponse. a) 0,25 — b) non : seules les branches d'un même nœud ont pour somme 1.

Correction de l'exercice 12 - Au moins un défaut

On note C_i « le composant i est conforme », avec $P(C_i) = 0,95$. Les composants étant **indépendants**, la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités, sans conditionnement.

a) Les trois composants sont conformes :

$$P(C_1 \cap C_2 \cap C_3) = 0,95 \times 0,95 \times 0,95 = 0,95^3 = 0,857375$$



Seul le chemin du haut donne un assemblage sans défaut

b) « Au moins un composant défectueux » est l'**événement contraire** de « les trois sont conformes » :

$$P(\text{au moins un défaut}) = 1 - 0,95^3 = 1 - 0,857375 = 0,142625$$

Environ 14,3 % des assemblages ont au moins un défaut.

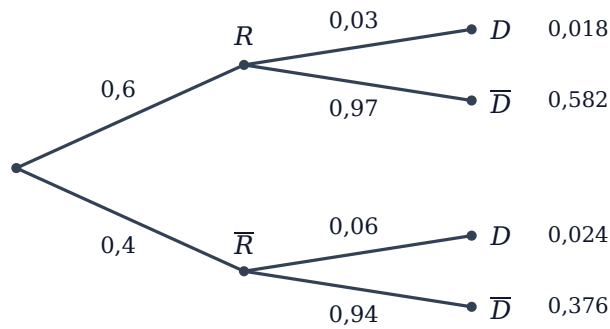
Piège. Additionner $3 \times 0,05 = 0,15$ donne une valeur proche mais fausse : on compterait deux fois les assemblages ayant plusieurs défauts.

Réponse. a) $0,95^3 \approx 0,857$ — b) $1 - 0,95^3 \approx 0,143$.

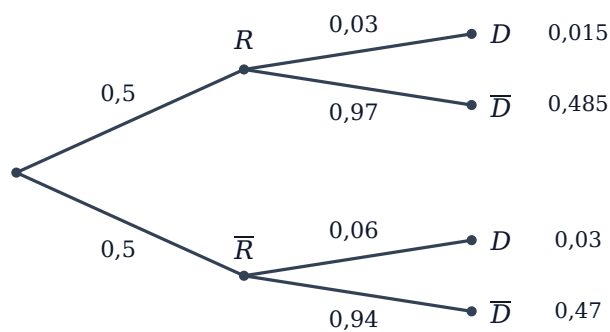
Correction de l'exercice 13 - Deux organisations

On note R « la pièce passe sur la ligne rapide » et D « elle est défectueuse ». Dans les

deux organisations, $P_R(D) = 0,03$ et $P_{\bar{R}}(D) = 0,06$; seule la répartition du premier niveau change.



Organisation 1 (R : ligne rapide)



Organisation 2

On applique la formule des probabilités totales dans chaque cas :

$$P(D) = P(R) \times P_R(D) + P(\bar{R}) \times P_{\bar{R}}(D)$$

- **Organisation 1** : $P(D) = 0,6 \times 0,03 + 0,4 \times 0,06 = 0,018 + 0,024 = 0,042$;
- **organisation 2** : $P(D) = 0,5 \times 0,03 + 0,5 \times 0,06 = 0,015 + 0,03 = 0,045$.

L'organisation 1 produit le moins de défauts : 4,2 % contre 4,5 %.

Explication. Elle envoie davantage de pièces sur la ligne la plus fiable : le taux global se rapproche alors de 3 %.

Réponse. L'organisation 1 : 4,2 % de défauts contre 4,5 %.

Correction de l'exercice 14 - Lire une branche

{{figure}}

a) Le nombre porté **sur** une branche de second niveau est une probabilité **conditionnelle** : $0,05 = P_A(D)$, la probabilité de D **sachant** A .

Le nombre écrit **au bout** du chemin est la probabilité d'une **intersection** : $0,015 = P(A \cap D)$, la probabilité que A et D se réalisent tous les deux.

b) Ces deux nombres sont reliés par la règle du chemin :

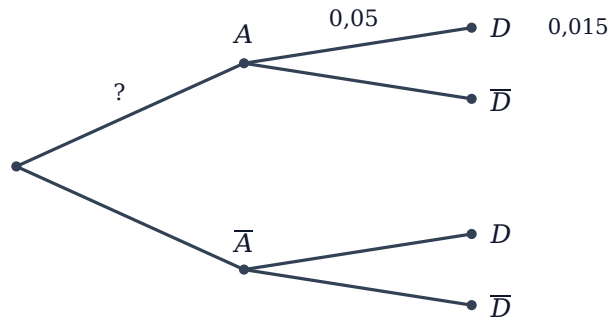
$$P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D)$$

On en tire la branche du premier niveau :

$$P(A) = \frac{P(A \cap D)}{P_A(D)} = \frac{0,015}{0,05} = 0,3$$

Vérification. $0,3 \times 0,05 = 0,015$.

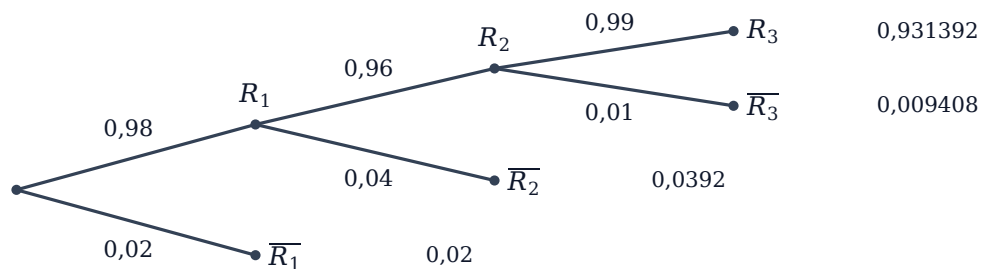
Réponse. a) $0,05 = P_A(D)$ et $0,015 = P(A \cap D)$ — b) $P(A) = 0,3$.



Une branche et le bout de son chemin

Correction de l'exercice 15 - Un arbre à trois niveaux

On note R_i « la pièce réussit le contrôle i ». Les contrôles étant **indépendants**, les probabilités se multiplient le long du chemin.



Trois contrôles indépendants : il faut réussir les trois

a) Passer les trois contrôles correspond au chemin $R_1 \rightarrow R_2 \rightarrow R_3$:

$$P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = 0,98 \times 0,96 \times 0,99 = 0,931392$$

b) « Échouer au moins une fois » est le contraire de « réussir les trois » :

$$P = 1 - 0,931392 = 0,068608$$

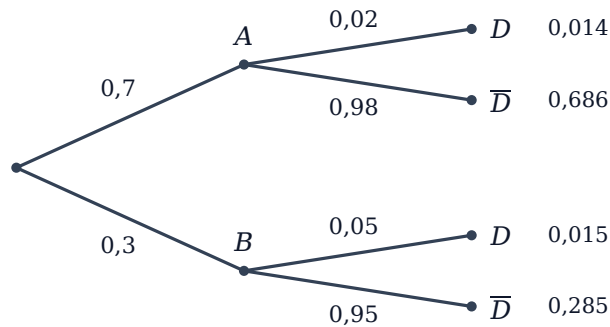
Environ 6,9 % des pièces échouent à au moins un contrôle.

Remarque. Il est inutile de dessiner les branches qui suivent un échec : dès qu'un contrôle est raté, la question est réglée. L'arbre réduit suffit.

Réponse. a) $0,931392 \approx 0,931$ — b) environ 0,069.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : arbre complet

On note A, B la provenance et D « la pièce est défectueuse » : $P(A) = 0,7$, $P_A(D) = 0,02$, $P(B) = 0,3$, $P_B(D) = 0,05$.



Fournisseur puis état de la pièce

a) **Probabilités totales**, en additionnant les deux chemins menant à D :

$$P(D) = 0,7 \times 0,02 + 0,3 \times 0,05 = 0,014 + 0,015 = 0,029$$

b) On remonte l'arbre :

$$P_D(B) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{0,015}{0,029} \approx 0,517$$

c) Le nombre attendu de pièces venant de B **et** défectueuses est l'effectif total multiplié par la probabilité du chemin $B \rightarrow D$:

$$8000 \times 0,015 = 120$$

Contrôle. Sur 8000 pièces, on attend $8000 \times 0,029 = 232$ défauts, dont 120 venant de B : $\frac{120}{232} \approx 0,517$, on retrouve b).

Réponse. a) $P(D) = 0,029$ — b) $P_D(B) \approx 0,517$ — c) 120 pièces.