Plaquette 5 – Fiabilité et diagnostics industriels

Probabilités conditionnelles et indépendance — Première STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

La méthode en quatre temps.

Temps	Geste
1	nommer les événements
2	placer les données sur un arbre
3	calculer le total, puis remonter
4	conclure en langage technique

Les deux calculs récurrents.

$P(D)$ = somme des probabilités des chemins qui mènent à D

$$P_D(A) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)}$$

Le piège des événements rares. Quand $P(A)$ est très petit, une alarme est le plus souvent **fausse**, même avec un bon détecteur : les non-événements sont bien plus nombreux.

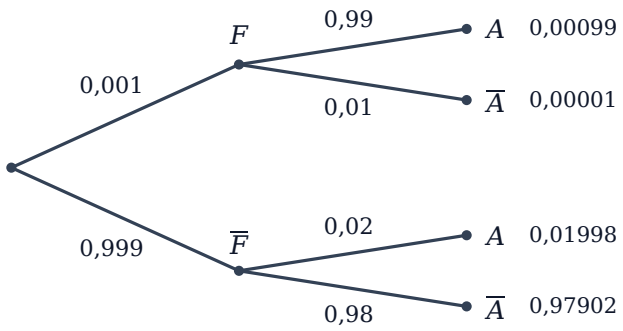
Acceptation d'un lot. Si on prélève n pièces indépendamment dans un lot de taux de défaut p :

$$P(\text{aucun défaut}) = (1-p)^n$$

⚠ Une probabilité conditionnelle se lit toujours **dans une population de référence** : la préciser dans la conclusion.

Correction de l'exercice 1 – Détecteur d'incendie

On note F « il y a un départ de feu dans la journée » et A « le détecteur se déclenche ». L'énoncé donne $P(F) = 0{,}001$, $P_F(A) = 0{,}99$ et $P_{\overline{F}}(A) = 0{,}02$.



Feu ou non, puis déclenchement de l'alarme

a) Le détecteur se déclenche par **deux chemins** incompatibles ; on les additionne (probabilités totales) :

$$P(A) = P(F) \times P_F(A) + P\left(\overline{F}\right) \times P_{\overline{F}}(A)$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$P(A) = 0{,}001 \times 0{,}99 + 0{,}999 \times 0{,}02 = 0{,}00099 + 0{,}01998 = 0{,}02097$$

b) Les deux chemins :

— $F \cap A$: vrai feu détecté, probabilité 0,00099 ;

— $\overline{F} \cap A$: fausse alarme, probabilité 0,01998.

Constat. Les fausses alarmes sont environ **vingt fois** plus probables que les vraies : le feu est très rare, alors que les jours sans feu sont presque tous les jours.

Réponse. a) $P(A) = 0{,}02097$ — b) 0,00099 (vrai feu) et 0,01998 (fausse alarme).

Correction de l’exercice 2 – Que vaut une alarme ?

On remonte l’arbre du détecteur :

$$P_A(F) = \frac{P(F \cap A)}{P(A)}$$

a) Avec $P(F \cap A) = 0{,}00099$ et $P(A) = 0{,}02097$:

$$P_A(F) = \frac{0{,}00099}{0{,}02097} \approx 0{,}047$$

Quand l’alarme sonne, il n’y a réellement un feu que dans environ 4,7 % des cas.

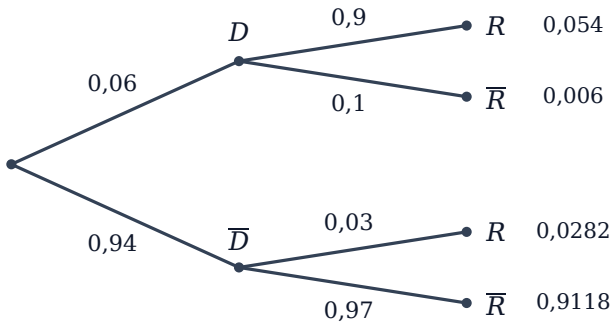
b) Ce résultat ne signifie **pas** que le détecteur est mauvais : il détecte 99 % des feux. Il traduit le **piège des événements rares** : sur 1000 jours, on attend environ 1 feu détecté contre 20 fausses alarmes.

Conduite à tenir. On ne peut pas ignorer une alarme (le coût d’un feu non traité est énorme) ; on la **vérifie** rapidement, par exemple avec un second capteur indépendant. Réduire le taux de fausses alarmes de 2 % à 0,2 % ferait passer $P_A(F)$ à environ 33 %.

Réponse. a) $P_A(F) \approx 0{,}047$ — b) la plupart des alarmes sont fausses : on vérifie avant d’agir, sans jamais ignorer l’alarme.

Correction de l’exercice 3 – Contrôle automatique

On note D « la pièce est défectueuse » et R « la pièce est rejetée » : $P(D) = 0{,}06$, $P_D(R) = 0{,}9$ et $P_{\overline{D}}(R) = 0{,}03$.



Défectueuse ou non, puis rejet

a) **Probabilités totales**, avec les deux chemins menant au rejet :

$$P(R) = 0{,}06 \times 0{,}9 + 0{,}94 \times 0{,}03 = 0{,}054 + 0{,}0282 = 0{,}0822$$

Environ 8,2 % des pièces sont rejetées.

b) On remonte l’arbre :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$P_R(D) = \frac{P(D \cap R)}{P(R)} = \frac{0{,}054}{0{,}0822} \approx 0{,}657$$

Environ 65,7 % des pièces rejetées sont réellement défectueuses ; le tiers restant est constitué de pièces conformes rejetées à tort.

Réponse. a) $P(R) = 0{,}0822$ — b) $P_R(D) \approx 0{,}657$.

Correction de l’exercice 4 – Ce qui passe le contrôle

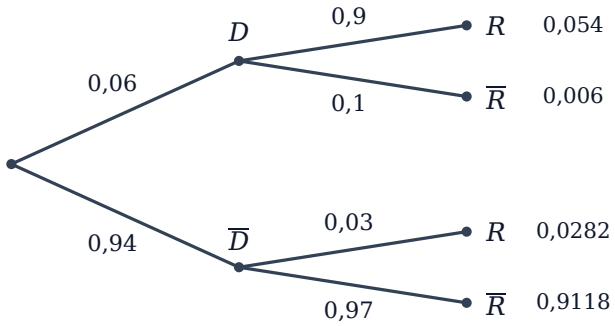
On reprend l’arbre du contrôle automatique ; une pièce **livrée** est une pièce **non rejetée** ($\overline{R}$).

a) Sachant que la pièce est défectueuse, elle passe le contrôle avec la probabilité de la branche $D \to \overline{R}$:

$$P_D\left(\overline{R}\right) = 1 - P_D(R) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$$

b) On cherche $P_{\overline{R}}(D)$. Deux chemins mènent à $\overline{R}$:

$$P\left(\overline{R}\right) = 0{,}06 \times 0{,}1 + 0{,}94 \times 0{,}97 = 0{,}006 + 0{,}9118 = 0{,}9178$$



Les pièces livrées suivent les chemins vers R

$$P_{\overline{R}}(D) = \frac{P\left(D \cap \overline{R}\right)}{P\left(\overline{R}\right)} = \frac{0{,}006}{0{,}9178} \approx 0{,}0065$$

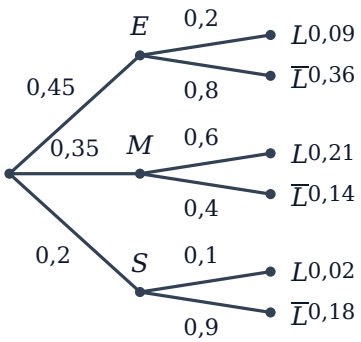
Bilan. Le contrôle fait passer le taux de défaut de 6 % en sortie de production à environ 0,65 % chez le client.

Réponse. a) 0,1 — b) environ 0,0065, soit 0,65 % des pièces livrées.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 5 – Diagnostic d’une panne

On note E, M, S les trois origines (électrique, mécanique, logicielle) et L « la réparation dure plus de deux heures ».



E : électrique, M : mécanique, S : logicielle ; L : plus de deux heures

a) **Probabilités totales** sur les trois chemins menant à L :

$$P(L) = 0{,}45 \times 0{,}2 + 0{,}35 \times 0{,}6 + 0{,}2 \times 0{,}1 = 0{,}09 + 0{,}21 + 0{,}02 = 0{,}32$$

b) On remonte l’arbre pour chaque origine, avec le même dénominateur $P(L) = 0{,}32$:

— électrique : $P_L(E) = \dfrac{0{,}09}{0{,}32} \approx 0{,}281$;

— mécanique : $P_L(M) = \dfrac{0{,}21}{0{,}32} \approx 0{,}656$;

— logicielle : $P_L(S) = \dfrac{0{,}02}{0{,}32} = 0{,}0625$.

L’origine la plus probable d’une réparation longue est **mécanique** (environ 66 %), alors que les pannes mécaniques ne représentent que 35 % des pannes.

Contrôle. $0{,}281 + 0{,}656 + 0{,}0625 \approx 1$.

Réponse. a) $P(L) = 0{,}32$ — b) mécanique, avec $P_L(M) \approx 0{,}656$.

Correction de l’exercice 6 – Acceptation d’un lot

Chaque pièce prélevée est conforme avec la probabilité $1 - p$, et les prélèvements sont **indépendants** : la probabilité que les cinq soient conformes est le produit des cinq probabilités.

$$P(\text{aucun défaut}) = (1 - p)^5$$

a) Avec $p = 0{,}03$:

$$P = 0{,}97^5 \approx 0{,}859$$

Le lot est accepté dans environ 86 % des cas.

b) Avec $p = 0{,}05$:

$$P = 0{,}95^5 \approx 0{,}774$$

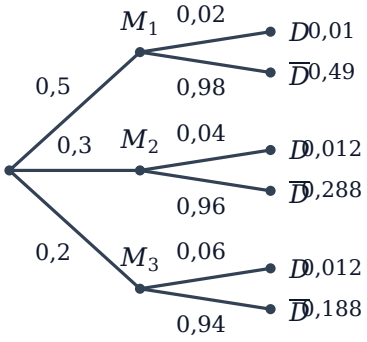
Commentaire. Quand la qualité se dégrade, le lot est moins souvent accepté, ce qui est le but du contrôle. Mais un lot à 5 % de défauts est encore accepté plus de trois fois sur quatre : un échantillon de 5 pièces est trop petit pour bien distinguer 3 % de 5 %.

Réponse. a) $0{,}97^5 \approx 0{,}859$ — b) $0{,}95^5 \approx 0{,}774$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 7 – Trois machines et un défaut

On note M_1, M_2, M_3 les machines et D « la pièce est défectueuse ».



Machine puis état de la pièce

a) **Probabilités totales** :

$$P(D) = 0{,}5 \times 0{,}02 + 0{,}3 \times 0{,}04 + 0{,}2 \times 0{,}06 = 0{,}01 + 0{,}012 + 0{,}012 = 0{,}034$$

b) On compare $P_D(M_1)$ et $P_D(M_2)$, qui ont le même dénominateur $P(D)$:

$$P_D(M_1) = \frac{0{,}01}{0{,}034} \approx 0{,}294 \qquad P_D(M_2) = \frac{0{,}012}{0{,}034} \approx 0{,}353$$

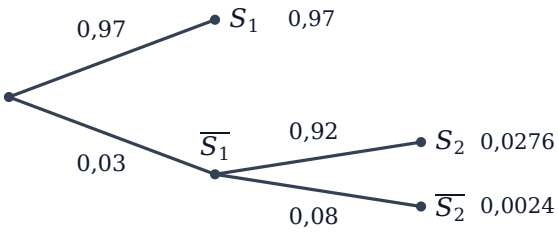
Une pièce défectueuse vient plutôt de la **machine 2**, bien que la machine 1 produise davantage : son taux de défaut est deux fois plus élevé.

Remarque. $P_D(M_3) = \dfrac{0{,}012}{0{,}034} \approx 0{,}353$ également : les machines 2 et 3 sont à égalité.

Réponse. a) $P(D) = 0{,}034$ — b) plutôt de la machine 2 ($\approx 0{,}353$ contre $\approx 0{,}294$).

Correction de l’exercice 8 – Une double sécurité

On note S_i « le dispositif i est efficace ». L’accident survient si **les deux** échouent ; les dispositifs étant **indépendants**, on multiplie les probabilités d’échec.



Le second dispositif n'intervient que si le premier échoue

a) $P\left(\overline{S_1}\right) = 1 - 0{,}97 = 0{,}03$ et $P\left(\overline{S_2}\right) = 1 - 0{,}92 = 0{,}08$, donc

$$P(\text{accident}) = P\left(\overline{S_1}\right) \times P\left(\overline{S_2}\right) = 0{,}03 \times 0{,}08 = 0{,}0024$$

b) Si le second dispositif a une efficacité e, l’accident a pour probabilité $0{,}03 \times (1 - e)$. On veut

$$0{,}03 \times (1 - e) < 0{,}001 \Leftrightarrow 1 - e < \frac{0{,}001}{0{,}03} \approx 0{,}0333$$

soit $e > 0{,}9667$ environ : il faut une efficacité d’au moins 96,7 % pour le second dispositif.

Lecture. Deux protections moyennes valent mieux qu’une seule très bonne : la seconde

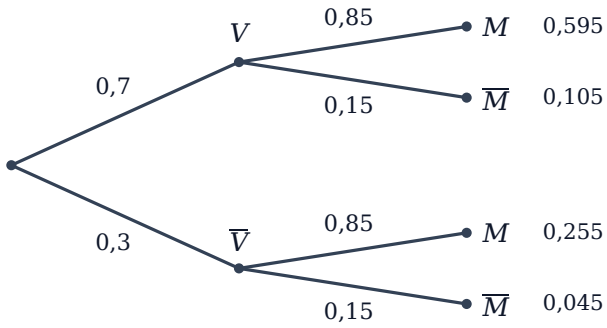
mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

n’a à rattraper que les rares échecs de la première.

Réponse. a) 0,0024 — b) une efficacité supérieure à environ 96,7 %.

Correction de l’exercice 9 – Deux contrôles successifs

On note V « le défaut est détecté au contrôle visuel » et M « il est détecté au contrôle dimensionnel ». Les contrôles sont **indépendants** : les branches du second niveau sont les mêmes sous V et sous $\overline{V}$.



V : détecté au visuel, M : au dimensionnel

a) « Détecté par au moins un contrôle » est le contraire de « échappe aux deux », qui correspond au seul chemin $\overline{V} \to \overline{M}$:

$$P\left(\overline{V} \cap \overline{M}\right) = 0{,}3 \times 0{,}15 = 0{,}045$$

$$P(\text{au moins une détection}) = 1 - 0{,}045 = 0{,}955$$

b) Passer les deux contrôles sans être détecté, c’est ce même chemin : probabilité 0,045.

Comparaison. Seul, le meilleur contrôle détecte 85 % des défauts ; ensemble, ils en détectent 95,5 %.

Réponse. a) 0,955 — b) 0,045.

Correction de l’exercice 10 – Une conditionnelle mal lue

On note D « la pièce est défectueuse » et R « elle est rejetée ».

Ce qui est donné. « 65 % des pièces **rejetées** sont défectueuses » : la population de référence est celle des pièces rejetées, donc

$$P_R(D) = 0{,}65$$

Ce que conclut le technicien. « 65 % des pièces **défectueuses** sont rejetées » signifierait $P_D(R) = 0{,}65$: la population de référence a changé.

Pourquoi c’est faux. $P_R(D)$ et $P_D(R)$ ont le même numérateur $P(D \cap R)$ mais des dénominateurs différents :

$$P_R(D) = \frac{P(D \cap R)}{P(R)} \qquad P_D(R) = \frac{P(D \cap R)}{P(D)}$$

Elles ne sont égales que si $P(R) = P(D)$. Avec le contrôle de l’exercice « Contrôle automatique », on a $P_R(D) \approx 0{,}657$ alors que $P_D(R) = 0{,}9$: les deux nombres sont très différents.

Réponse. $P_R(D) = 0{,}65$ ne permet pas de conclure $P_D(R) = 0{,}65$: les populations de référence diffèrent.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 11 – Choisir un plan de contrôle

Chaque pièce prélevée est conforme avec la probabilité 0,96, et les prélèvements sont indépendants. Le lot est accepté si toutes les pièces prélevées sont conformes :

$$P(\text{acceptation}) = 0{,}96^{n}$$

a) **Plan A** ($n = 3$) : $0{,}96^{3} \approx 0{,}885$. **Plan B** ($n = 8$) : $0{,}96^{8} \approx 0{,}721$.

b) Une production à 4 % de défauts est acceptée 88,5 % du temps avec le plan A, et seulement 72,1 % avec le plan B.

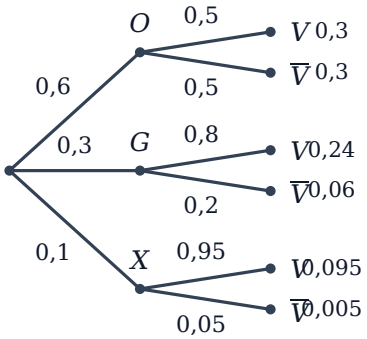
Le **plan B** protège mieux le client : il laisse passer moins souvent une production de qualité insuffisante. En contrepartie, il demande plus de contrôles et refuse aussi plus souvent de bons lots.

Le principe. Plus l’échantillon est grand, plus il a de chances de contenir au moins une pièce défectueuse quand il y en a.

Réponse. a) A : $0{,}96^{3} \approx 0{,}885$; B : $0{,}96^{8} \approx 0{,}721$ — b) le plan B.

Correction de l’exercice 12 – Remonter à la cause

On note O (outil usé), G (mauvais réglage), X (matière) les causes, et V « le défaut est visible à l’œil ».



O : outil, G : réglage, X : matière ; V : défaut visible

a) **Probabilités totales** sur les trois chemins menant à V :

$$P(V) = 0{,}6 \times 0{,}5 + 0{,}3 \times 0{,}8 + 0{,}1 \times 0{,}95 = 0{,}3 + 0{,}24 + 0{,}095 = 0{,}635$$

b) On remonte l’arbre, avec le dénominateur commun $P(V) = 0{,}635$:

— outil : $P_V(O) = \dfrac{0{,}3}{0{,}635} \approx 0{,}472$;

— réglage : $P_V(G) = \dfrac{0{,}24}{0{,}635} \approx 0{,}378$;

— matière : $P_V(X) = \dfrac{0{,}095}{0{,}635} \approx 0{,}150$.

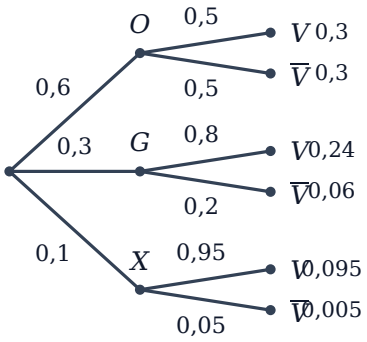
Un défaut visible vient le plus probablement de l’**outil usé** (environ 47 %). Sa part baisse pourtant par rapport aux 60 % de départ, car ses défauts sont les moins souvent visibles ; à l’inverse, la part de la matière passe de 10 % à 15 %.

Réponse. a) $P(V) = 0{,}635$ — b) l’outil usé, avec $P_V(O) \approx 0{,}472$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 13 – Défauts invisibles

On reprend l’arbre précédent et l’on regarde cette fois les chemins menant à $\overline{V}$.



Les chemins vers $\overline{V}$ (défaut invisible)

a) $P\left(\overline{V}\right) = 1 - 0{,}635 = 0{,}365$. Le chemin « outil puis invisible » vaut $0{,}6 \times 0{,}5 = 0{,}3$, donc

$$P_{\overline{V}}(O) = \frac{P\left(O \cap \overline{V}\right)}{P\left(\overline{V}\right)} = \frac{0{,}3}{0{,}365} \approx 0{,}822$$

b) Un défaut **invisible** vient de l’outil dans environ 82 % des cas, contre 47 % pour un défaut visible.

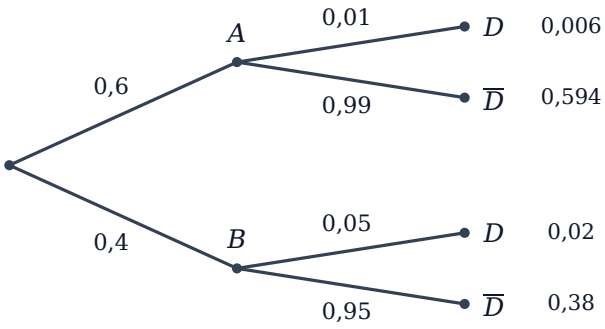
Explication. Les défauts dus à l’outil sont les moins souvent visibles (50 %) : ils sont sur-représentés parmi les défauts invisibles. Pour les réglages et la matière : $P_{\overline{V}}(G) = \dfrac{0{,}06}{0{,}365} \approx 0{,}164$ et $P_{\overline{V}}(X) = \dfrac{0{,}005}{0{,}365} \approx 0{,}014$.

Conséquence pratique. Si l’on trouve un défaut au contrôle dimensionnel alors qu’il était invisible, c’est l’outil qu’il faut vérifier en premier.

Réponse. a) $P_{\overline{V}}(O) \approx 0{,}822$ — b) bien plus que dans le cas visible ($\approx 0{,}472$).

Correction de l’exercice 14 – Deux fournisseurs et un contrôle

On note A, B les fournisseurs et D « le composant est défectueux ».



Fournisseur puis défaut

a) **Probabilités totales** :

$$P(D) = 0{,}6 \times 0{,}01 + 0{,}4 \times 0{,}05 = 0{,}006 + 0{,}02 = 0{,}026$$

b) Un composant défectueux est livré s’il **n’est pas détecté** par le contrôle, ce qui arrive avec la probabilité $1 - 0{,}8 = 0{,}2$. On cherche la probabilité qu’un composant soit à la fois défectueux et non détecté :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$P(D \cap \text{non détecté}) = P(D) \times 0{,}2 = 0{,}026 \times 0{,}2 = 0{,}0052$$

Environ 0,52 % des composants sont défectueux et livrés malgré le contrôle.

Lecture de l'énoncé. Si la question est « sachant qu'un composant est défectueux, quelle est la probabilité qu'il soit livré ? », la réponse est la branche conditionnelle 0,2. Le mot « sachant » change la population de référence.

Réponse. a) $P(D) = 0{,}026$ — b) 0,0052 (et 0,2 sachant que le composant est défectueux).

Correction de l'exercice 15 – Fiabilité d'une chaîne complète

Une pièce traverse la chaîne si elle passe **chacun** des quatre postes. Les postes étant **indépendants**, on multiplie les probabilités de passage, qui valent 1 moins le taux de rebut :

$$P(\text{traverser}) = 0{,}98 \times 0{,}97 \times 0{,}99 \times 0{,}96$$

a) Le calcul donne

$$P(\text{traverser}) \approx 0{,}9035$$

Environ 90,3 % des pièces arrivent au bout.

b) Sur 5000 pièces lancées, on attend

$$5000 \times 0{,}9035 \approx 4517 \text{ pièces}$$

Piège. Additionner les taux de rebut ($2 + 3 + 1 + 4 = 10\,\%$) donne une valeur proche mais fausse : $1 - 0{,}9035 = 9{,}65\,\%$. L'addition compte deux fois les pièces qui auraient été rebutées à plusieurs postes.

Réponse. a) $\approx 0{,}9035$ — b) environ 4517 pièces.

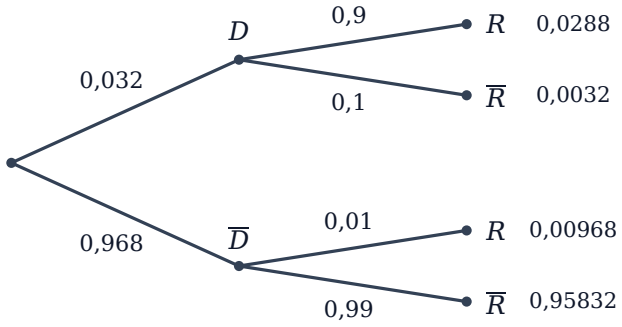
Correction de l'exercice 16 – Synthèse : un problème complet

On note D « le composant est défectueux » et R « il est rejeté par le contrôle d'entrée ».

a) Le défaut dépend du fournisseur : **probabilités totales** sur les fournisseurs A et B.

$$P(D) = 0{,}7 \times 0{,}02 + 0{,}3 \times 0{,}06 = 0{,}014 + 0{,}018 = 0{,}032$$

b) Le contrôle rejette 90 % des défectueux et 1 % des conformes : $P_D(R) = 0{,}9$ et $P_{\overline{D}}(R) = 0{,}01$.



État du composant puis rejet au contrôle d'entrée

$$P(R) = 0{,}032 \times 0{,}9 + 0{,}968 \times 0{,}01 = 0{,}0288 + 0{,}00968 = 0{,}03848$$

c) On remonte l'arbre :

$$P_R(D) = \frac{0{,}0288}{0{,}03848} \approx 0{,}748$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Un composant rejeté est réellement défectueux dans environ trois cas sur quatre. Le quart restant correspond à des composants conformes rejetés à tort : ce sont eux qui coûtent cher, d'où l'intérêt de recontrôler les rejets.

Réponse. a) $P(D) = 0{,}032$ — b) $P(R) = 0{,}03848$ — c) $P_R(D) \approx 0{,}748$: oui dans environ 75 % des cas.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).