Plaquette 4 – Indépendance : tester et exploiter

Probabilités conditionnelles et indépendance — Première STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Le test. A et B sont indépendants lorsque

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Formulations équivalentes : $P_A(B) = P(B)$, ou $P_A(B) = P_{\overline{A}}(B)$.

Ne pas confondre.

Notion	Définition	Effet
incompatibles	$A \cap B = \varnothing$	$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
indépendants	$P(A \cap B) = P(A)P(B)$	le produit s'applique

Deux événements de probabilité non nulle **ne peuvent pas** être à la fois incompatibles et indépendants.

Fiabilité d'un système.

Montage	Fonctionne si	Probabilité
série	tous fonctionnent	$p_1 \times p_2 \times \cdots$
parallèle	au moins un fonctionne	$1 - (1 - p_1)(1 - p_2)\cdots$

Stabilité par passage au contraire. Si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ le sont aussi.

⚠ Un tirage **sans remise** brise l'indépendance : les probabilités changent d'un tirage à l'autre.

Correction de l'exercice 1 – Un tableau où l'indépendance vaut

On note J « la pièce vient de l'équipe de jour » et D « la pièce est défectueuse ». On teste l'égalité

$$P(J \cap D) = P(J) \times P(D)$$

— $P(J) = \dfrac{600}{1000} = 0{,}6$ et $P(D) = \dfrac{50}{1000} = 0{,}05$, donc $P(J) \times P(D) = 0{,}03$;

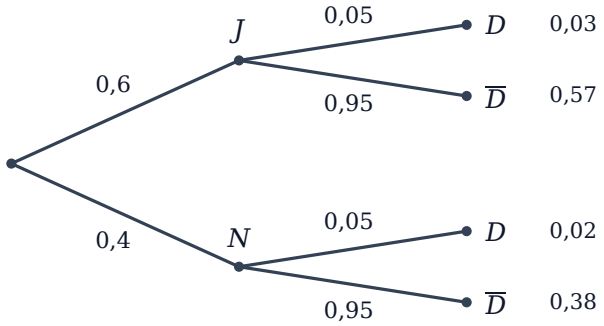
— $P(J \cap D) = \dfrac{30}{1000} = 0{,}03$.

L'égalité est vérifiée : les deux événements sont **indépendants**.

Lecture par les taux. Le taux de défaut est le même dans les deux équipes :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$P_J(D) = \dfrac{30}{600} = 0{,}05$ et $P_N(D) = \dfrac{20}{400} = 0{,}05$. Sur un arbre, les branches du second niveau sont identiques :



Mêmes branches sous J et sous N : indépendance

Savoir qu'une pièce vient de l'équipe de jour ne change rien à la probabilité qu'elle soit défectueuse.

Réponse. Oui : $P(J \cap D) = 0{,}03 = P(J) \times P(D)$.

Correction de l'exercice 2 – Un tableau où elle ne vaut pas

On note A « la pièce vient de l'atelier A » et D « la pièce est défectueuse ». On compare $P(A \cap D)$ et $P(A) \times P(D)$:

$$P(A) = \frac{500}{800} = 0{,}625 \qquad P(D) = \frac{41}{800} = 0{,}05125$$

$$P(A) \times P(D) = 0{,}625 \times 0{,}05125 \approx 0{,}0320 \qquad P(A \cap D) = \frac{20}{800} = 0{,}025$$

Les deux valeurs sont différentes : A et D ne sont **pas indépendants**.

Lecture par les taux. $P_A(D) = \dfrac{20}{500} = 0{,}04$ alors que $P_B(D) = \dfrac{21}{300} = 0{,}07$: l'atelier B a un taux de défaut presque double. Savoir d'où vient la pièce renseigne sur son risque d'être défectueuse.

Rédaction. On écrit toujours les deux nombres comparés ; une simple affirmation « ils ne sont pas indépendants » ne suffit pas.

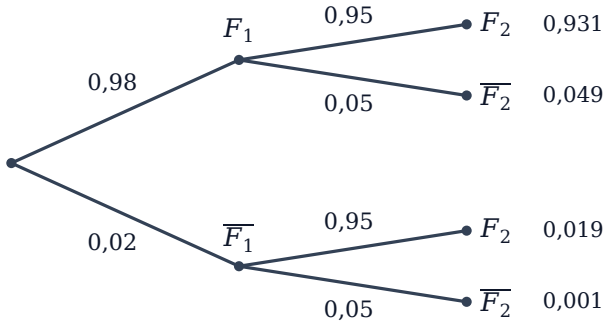
Réponse. Non : $P(A \cap D) = 0{,}025$ alors que $P(A) \times P(D) \approx 0{,}032$.

Correction de l'exercice 3 – Deux capteurs indépendants

On note F_1 et F_2 « le capteur i fonctionne », avec $P(F_1) = 0{,}98$ et $P(F_2) = 0{,}95$. Les

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

capteurs étant **indépendants**, la probabilité que deux événements se produisent ensemble est le produit de leurs probabilités.



Deux capteurs indépendants

a) Les deux fonctionnent :

$$P(F_1 \cap F_2) = 0{,}98 \times 0{,}95 = 0{,}931$$

b) Les deux tombent en panne : $P\left(\overline{F_1}\right) = 0{,}02$ et $P\left(\overline{F_2}\right) = 0{,}05$, donc

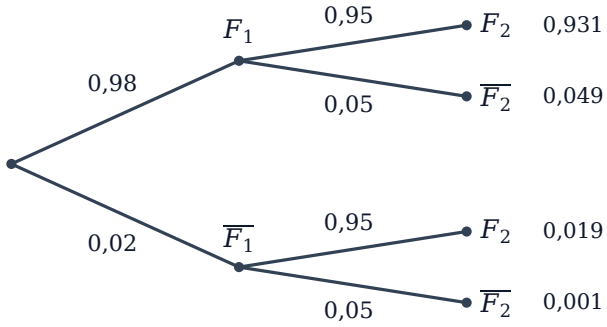
$$P\left(\overline{F_1} \cap \overline{F_2}\right) = 0{,}02 \times 0{,}05 = 0{,}001$$

Remarque. L'indépendance de F_1 et F_2 entraîne celle de leurs contraires : c'est ce qui autorise le produit en b).

Réponse. a) 0,931 — b) 0,001.

Correction de l'exercice 4 – Au moins un capteur

On reprend les deux capteurs indépendants de fiabilités 0,98 et 0,95.



Au moins un fonctionne : trois chemins sur quatre

a) « Au moins un fonctionne » est le contraire de « les deux tombent en panne » :

$$P(\text{au moins un}) = 1 - P\left(\overline{F_1} \cap \overline{F_2}\right) = 1 - 0{,}001 = 0{,}999$$

b) « Exactement un fonctionne » regroupe deux chemins incompatibles de l'arbre :

$$P = P\left(F_1 \cap \overline{F_2}\right) + P\left(\overline{F_1} \cap F_2\right) = 0{,}98 \times 0{,}05 + 0{,}02 \times 0{,}95 = 0{,}049 + 0{,}019 = 0{,}068$$

Contrôle. Les quatre chemins ont pour somme 1 : 0,931 + 0,068 + 0,001 = 1 (deux, un, aucun).

Réponse. a) 0,999 — b) 0,068.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 5 – Montage en série

Dans un montage en **série**, le système ne fonctionne que si **tous** les composants fonctionnent. Les composants étant indépendants, on multiplie leurs fiabilités :

$$P(\text{système}) = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n$$

a) Avec quatre composants de fiabilité 0,99 :

$$P = 0{,}99^4 \approx 0{,}9606$$

b) On cherche le plus grand nombre n de composants tel que $0{,}99^n \geq 0{,}95$. La suite $0{,}99^n$ est décroissante ; on calcule ses termes :

$$0{,}99^5 \approx 0{,}9510 \qquad 0{,}99^6 \approx 0{,}9415$$

On peut monter **au plus** 5 **composants** pour rester au-dessus de 0,95.

Lecture. Chaque composant ajouté fait perdre environ 1 % de fiabilité : en série, la fiabilité ne fait que baisser.

Réponse. a) $0{,}99^4 \approx 0{,}961$ — b) 5 composants au maximum.

Correction de l’exercice 6 – Montage en parallèle

Dans un montage en **parallèle**, le système tombe en panne seulement si **tous** les capteurs tombent en panne. Chaque capteur tombe en panne avec la probabilité $1 - 0{,}85 = 0{,}15$, et les capteurs sont indépendants :

$$P(\text{système}) = 1 - 0{,}15^n$$

a) Avec deux capteurs : $1 - 0{,}15^2 = 1 - 0{,}0225 = 0{,}9775$. Avec trois : $1 - 0{,}15^3 = 1 - 0{,}003375 = 0{,}996625$.

b) On veut $1 - 0{,}15^n > 0{,}999$, soit $0{,}15^n < 0{,}001$. On calcule :

$$0{,}15^3 = 0{,}003375 \qquad 0{,}15^4 \approx 0{,}000506$$

Il faut 4 **capteurs** en parallèle.

Lecture. En parallèle, chaque capteur ajouté divise le risque de panne par plus de six : c’est le principe de la **redondance**.

Réponse. a) 0,9775 puis 0,996625 — b) 4 capteurs.

Correction de l’exercice 7 – Série et parallèle

On note $p_A = 0{,}95$ et $p_B = 0{,}9$ les fiabilités des modules, supposés indépendants.

a) En **série**, il faut que les deux fonctionnent :

$$P = p_A \times p_B = 0{,}95 \times 0{,}9 = 0{,}855$$

b) On double le module B en parallèle : le bloc B tombe en panne seulement si les deux exemplaires tombent en panne.

$$P(\text{bloc B}) = 1 - 0{,}1 \times 0{,}1 = 0{,}99$$

Ce bloc reste en série avec A :

$$P = 0{,}95 \times 0{,}99 = 0{,}9405$$

La fiabilité passe de 85,5 % à 94,05 %.

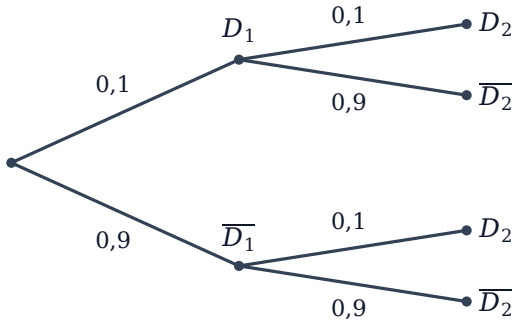
Méthode. On remplace chaque bloc en parallèle par sa fiabilité équivalente, puis on multiplie les blocs en série.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

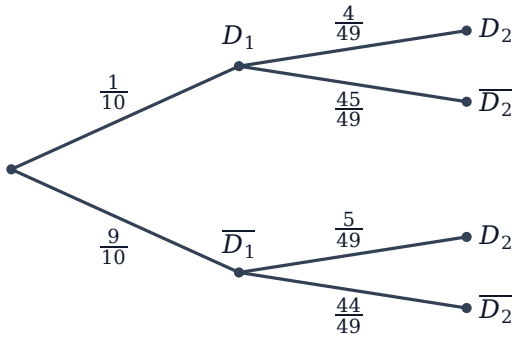
Réponse. a) 0,855 — b) 0,9405.

Correction de l’exercice 8 – Avec ou sans remise

On note D_1 et D_2 « la première (la seconde) pièce prélevée est défectueuse ». Au premier prélèvement, $P(D_1) = \dfrac{5}{50} = 0{,}1$.



Avec remise



Sans remise

a) **Avec remise**, le lot est reconstitué : le second prélèvement se fait dans les mêmes conditions, et les deux prélèvements sont **indépendants**.

$$P(D_1 \cap D_2) = 0{,}1 \times 0{,}1 = 0{,}01$$

b) **Sans remise**, après une pièce défectueuse il en reste 4 sur 49 : $P_{D_1}(D_2) = \dfrac{4}{49}$.

$$P(D_1 \cap D_2) = \frac{5}{50} \times \frac{4}{49} = \frac{20}{2450} = \frac{2}{245} \approx 0{,}0082$$

Comparaison. Sans remise, la probabilité est un peu plus faible : une pièce défectueuse en moins rend la seconde moins probable. Sur les arbres, les branches du second niveau sont identiques avec remise, différentes sans remise.

Réponse. a) 0,01 — b) $\dfrac{2}{245} \approx 0{,}0082$.

Correction de l’exercice 9 – Indépendants ou incompatibles

Ce que décrit l’élève. « A et B ne peuvent pas se produire en même temps » signifie $A \cap B = \varnothing$: les événements sont **incompatibles**, et $P(A \cap B) = 0$.

Pourquoi ils ne sont pas indépendants. L’indépendance exige

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Si $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$, le produit est strictement positif, alors que $P(A \cap B) = 0$: l’égalité

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

est fausse.

Le sens concret. Savoir que A s'est produit rend B **impossible** : $P_A(B) = 0$, alors que $P(B) > 0$. C'est même la dépendance la plus forte possible.

Exemple. Une pièce ne peut pas être à la fois « conforme » et « défectueuse » : ces deux événements sont incompatibles, et évidemment pas indépendants.

Réponse. Faux : incompatibles (de probabilités non nulles) implique **dépendants**, car $P(A \cap B) = 0 \neq P(A) \times P(B)$.

Correction de l'exercice 10 – Indépendance et contraire

a) A et B sont indépendants, et $P\left(\overline{B}\right) = 0{,}7$. L'événement A se partage en $A \cap B$ et $A \cap \overline{B}$, donc

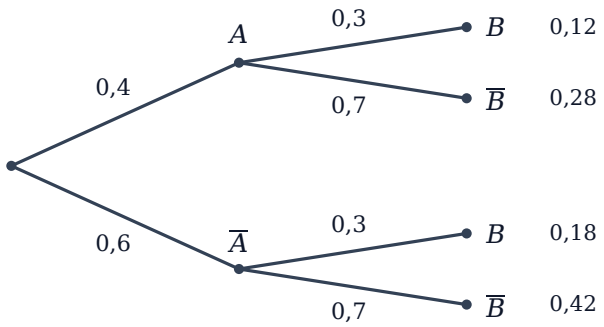
$$P\left(A \cap \overline{B}\right) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}4 - 0{,}4 \times 0{,}3 = 0{,}4 - 0{,}12 = 0{,}28$$

b) On compare avec le produit :

$$P(A) \times P\left(\overline{B}\right) = 0{,}4 \times 0{,}7 = 0{,}28$$

L'égalité $P\left(A \cap \overline{B}\right) = P(A) \times P\left(\overline{B}\right)$ est vérifiée : A et $\overline{B}$ sont **indépendants**.

Sur l'arbre, l'indépendance se voit : sous A comme sous $\overline{A}$, la branche B vaut 0,3 et la branche $\overline{B}$ vaut 0,7.



Indépendance : mêmes branches sous A et sous Ā

Réponse. a) 0,28 — b) $0{,}28 = 0{,}4 \times 0{,}7$: indépendants.

Correction de l'exercice 11 – Une addition de fiabilités

Première anomalie. Une probabilité est toujours comprise entre 0 et 1 : 1,93 est impossible.

L'erreur de raisonnement. Additionner $P(F_1) + P(F_2)$ ne serait permis que pour des événements **incompatibles**, alors qu'ici les deux capteurs peuvent fonctionner en même temps.

Le bon calcul. En parallèle, le système fonctionne si au moins un capteur fonctionne ; on passe par le contraire, « les deux tombent en panne », en utilisant l'indépendance :

$$P(\text{système}) = 1 - (1 - 0{,}98)(1 - 0{,}95) = 1 - 0{,}02 \times 0{,}05 = 1 - 0{,}001 = 0{,}999$$

Contrôle de vraisemblance. Le résultat dépasse la fiabilité du meilleur capteur (0,98) sans dépasser 1 : c'est ce qu'on attend d'un montage en parallèle.

Réponse. 0,999, et non 1,93.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 12 – Test par les conditionnelles

a) A et B sont indépendants lorsque savoir que A est réalisé ne change pas la probabilité de B :

$$P_A(B) = P(B)$$

Ici $P_A(B) = 0{,}6$ et $P(B) = 0{,}6$: les événements sont **indépendants**.

b) Par l’indépendance, l’intersection est un produit :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0{,}25 \times 0{,}6 = 0{,}15$$

On en déduit la réunion :

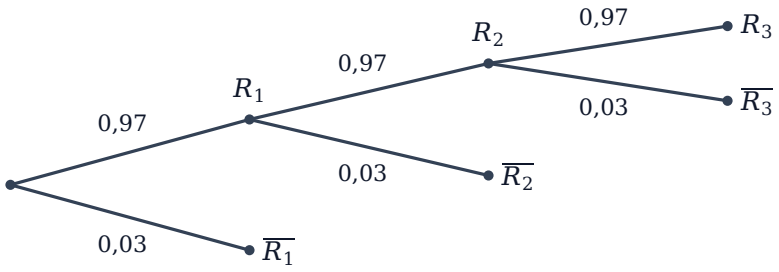
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}25 + 0{,}6 - 0{,}15 = 0{,}7$$

Contrôle. $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0{,}25 \times 0{,}6 = 0{,}15$: même résultat par la formule des probabilités composées.

Réponse. a) oui ($P_A(B) = P(B) = 0{,}6$) — b) $P(A \cap B) = 0{,}15$ et $P(A \cup B) = 0{,}7$.

Correction de l’exercice 13 – Trois contrôles indépendants

On note R_i « le contrôle i est réussi ». Les contrôles étant **indépendants**, la probabilité de réussir les trois est le produit :



Il faut réussir les trois contrôles

a) $P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = 0{,}97^3 = 0{,}912673$, soit environ 91,3 %.

b) « Échouer au moins un contrôle » est le contraire de « réussir les trois » :

$$P = 1 - 0{,}97^3 = 1 - 0{,}912673 = 0{,}087327$$

Environ 8,7 % des pièces échouent à au moins un contrôle.

Piège. $3 \times 0{,}03 = 0{,}09$ est une approximation, pas le résultat : l’addition compte plusieurs fois les pièces qui échouent à plusieurs contrôles.

Réponse. a) $0{,}97^3 \approx 0{,}913$ — b) $\approx 0{,}087$.

Correction de l’exercice 14 – Un tableau à trois colonnes

L’état de l’appareil est indépendant de l’équipe si la répartition des états est **la même** dans les deux équipes. On calcule les proportions ligne par ligne :

— équipe A : neuf $\frac{300}{500} = 0{,}6$, reconditionné $\frac{150}{500} = 0{,}3$, reformé $\frac{50}{500} = 0{,}1$;

— équipe B : neuf $\frac{180}{300} = 0{,}6$, reconditionné $\frac{90}{300} = 0{,}3$, reformé $\frac{30}{300} = 0{,}1$.

Les proportions sont identiques : savoir de quelle équipe vient l’appareil ne change rien à son état. **L’état ne dépend pas de l’équipe.**

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Vérification par la définition, sur une case : $P(A) = \dfrac{500}{800} = 0{,}625$, $P(\text{neuf}) = \dfrac{480}{800} = 0{,}6$ et

$$P(A \cap \text{neuf}) = \frac{300}{800} = 0{,}375 = 0{,}625 \times 0{,}6$$

Réponse. Non : les proportions 0,6 / 0,3 / 0,1 sont identiques dans les deux équipes.

Correction de l’exercice 15 – Fiabilité sur une durée

Le relais tient un cycle avec la probabilité 0,999, et les cycles sont **indépendants**. Tenir n cycles de suite, c’est réussir n épreuves indépendantes :

$$P(\text{tenir } n \text{ cycles}) = 0{,}999^n$$

a) Pour 100 cycles : $0{,}999^{100} \approx 0{,}905$.

b) Pour 1000 cycles : $0{,}999^{1000} \approx 0{,}368$.

Lecture. Une fiabilité de 99,9 % par cycle paraît excellente, mais sur 1000 cycles le relais a près de deux chances sur trois de tomber en panne au moins une fois. Il faut raisonner sur la durée d’utilisation réelle, pas sur un cycle.

Réponse. a) $0{,}999^{100} \approx 0{,}905$ — b) $0{,}999^{1000} \approx 0{,}368$.

Correction de l’exercice 16 – Synthèse : concevoir un système

Les trois éléments sont indépendants et en **série** : on multiplie leurs fiabilités.

a) $P = 0{,}9 \times 0{,}98 \times 0{,}95 = 0{,}8379$.

b) Le capteur doublé en parallèle a pour fiabilité $1 - 0{,}1 \times 0{,}1 = 0{,}99$. Le système devient

$$P = 0{,}99 \times 0{,}98 \times 0{,}95 = 0{,}92169$$

c) On compare les deux possibilités restantes :

— doubler la carte : $1 - 0{,}02^2 = 0{,}9996$, d’où $0{,}99 \times 0{,}9996 \times 0{,}95 \approx 0{,}9401$;

— doubler l’actionneur : $1 - 0{,}05^2 = 0{,}9975$, d’où $0{,}99 \times 0{,}98 \times 0{,}9975 \approx 0{,}9678$.

Il faut doubler ensuite l’**actionneur** : c’est désormais l’élément le moins fiable, celui qui limite le plus l’ensemble.

Règle de conception. On renforce toujours en priorité le maillon le plus faible.

Réponse. a) 0,8379 — b) 0,92169 — c) l’actionneur (≈ 0,968 contre ≈ 0,940).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).