

Plaquette 1 - Tableaux, arbres pondérés et indépendance

Probabilités conditionnelles et indépendance — Première STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules du cours.

- **Probabilité conditionnelle** de B sachant A (avec $P(A) \neq 0$) :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{donc} \quad P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$$

- Dans un **arbre pondéré** : la probabilité d'un chemin est le **produit** des probabilités le long du chemin ; la somme des branches issues d'un même nœud vaut 1.
- **Formule des probabilités totales** (partition $A, \bar{A}$) :

$$P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$$

- Réunion : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Contraire : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
- **Indépendance** : A et B sont indépendants si

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \quad (\text{équivalent à } P_A(B) = P(B))$$

- Deux événements **incompatibles** ($A \cap B = \emptyset$) ne sont pas indépendants (sauf cas de probabilité nulle) : ce sont deux notions différentes.
- Dans un tableau croisé, une probabilité conditionnelle se lit en divisant par le **total de la ligne (ou de la colonne)** correspondant à la condition.

Correction de l'exercice 1 - Lire un tableau croisé

Chaque pièce a la même probabilité d'être prélevée : on divise les effectifs par 500.

a) $P(A) = \frac{300}{500} = 0,6$.

b) $P(D) = \frac{29}{500} = 0,058$, soit 5,8 %.

c) $P(A \cap D) = \frac{15}{500} = 0,03$: la pièce vient de A **et** est défectueuse.

Réponse. a) 0,6 · b) 0,058 · c) 0,03.

Correction de l'exercice 2 - Probabilité conditionnelle dans un tableau

- a) On conditionne par A : on divise par le total de la ligne A .

$$P_A(D) = \frac{P(A \cap D)}{P(A)} = \frac{15}{300} = 0,05$$

- Soit 5 % de défauts sur la machine A .

- b) On conditionne par D : on divise par le total de la colonne « défectueuses ».

$$P_D(A) = \frac{15}{29} \approx 0,517$$

- Environ 51,7 % des pièces défectueuses viennent de A .
- Les deux résultats sont très différents : $P_A(D) \neq P_D(A)$. C'est le piège classique du chapitre.

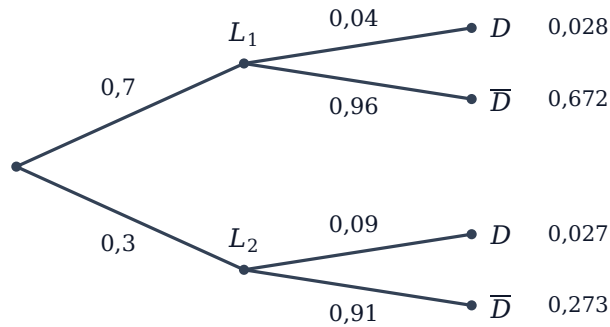
Réponse. a) $P_A(D) = 0,05$ · b) $P_D(A) \approx 0,517$.

Correction de l'exercice 3 - Construire un arbre pondéré

On note L_1, L_2 les lignes et D l'événement « défectueuse ».

— Données : $P(L_1) = 0,7$, $P_{L_1}(D) = 0,04$, $P(L_2) = 0,3$, $P_{L_2}(D) = 0,09$.

L'arbre pondéré : premier niveau, la ligne ; second niveau, l'état de la pièce **sachant** la ligne.



Ligne de production puis état de la pièce

— La probabilité d'un chemin de l'arbre est le **produit** des probabilités rencontrées :

$$P(L_2 \cap D) = P(L_2) \times P_{L_2}(D) = 0,3 \times 0,09 = 0,027$$

— Soit 2,7 % des pièces produites.

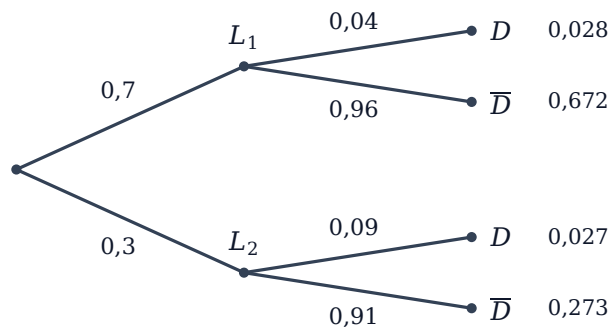
Réponse. $P(L_2 \cap D) = 0,027$.

Correction de l'exercice 4 - Probabilités totales

Une pièce défectueuse peut venir de l'une ou l'autre ligne : on **additionne** les deux chemins.

$$P(D) = P(L_1) \times P_{L_1}(D) + P(L_2) \times P_{L_2}(D)$$

Sur l'arbre, ce sont les chemins $L_1 \rightarrow D$ et $L_2 \rightarrow D$:



Deux chemins mènent à D

— $P(D) = 0,7 \times 0,04 + 0,3 \times 0,09 = 0,028 + 0,027 = 0,055$.

— Soit 5,5 % de pièces défectueuses au total.

— Contrôle de vraisemblance : le résultat est compris entre 4 % et 9 %, les deux taux de départ. C'est normal : c'est une moyenne pondérée.

Réponse. $P(D) = 0,055$.

Correction de l'exercice 5 - Remonter l'arbre

On applique la définition de la probabilité conditionnelle, avec les résultats précédents.

$$P_D(L_1) = \frac{P(L_1 \cap D)}{P(D)} = \frac{0,028}{0,055} \approx 0,509$$

- Environ 50,9 % des pièces défectueuses viennent de la ligne 1.
- Bien que la ligne 1 soit la plus fiable (4 % de défauts contre 9 %), elle produit **plus de la moitié** des pièces défectueuses : c'est elle qui fabrique le plus de pièces.

Réponse. $P_D(L_1) \approx 0,509$.

Correction de l'exercice 6 - Tester l'indépendance

Critère du cours : A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

- Produit : $0,4 \times 0,25 = 0,1$.
- Or $P(A \cap B) = 0,1$: l'égalité est vérifiée, donc A et B **sont indépendants**.
- Autre lecture : $P_A(B) = \frac{0,1}{0,4} = 0,25 = P(B)$: savoir que A est réalisé ne change pas la probabilité de B .

Réponse. Oui : $P(A) \times P(B) = 0,1 = P(A \cap B)$.

Correction de l'exercice 7 - Événements non indépendants

On compare $P(A \cap D)$ et $P(A) \times P(D)$.

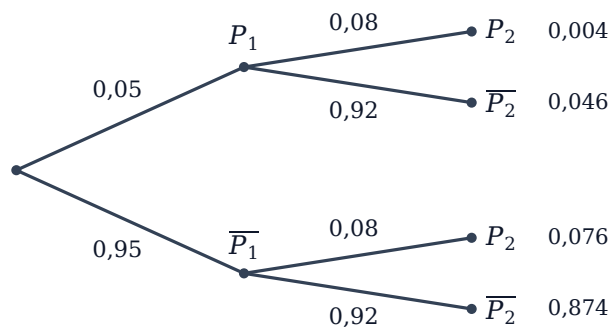
- $P(A \cap D) = 0,03$.
- $P(A) \times P(D) = 0,6 \times 0,058 = 0,0348$.
- $0,03 \neq 0,0348$: les événements **ne sont pas indépendants**.
- Interprétation : le taux de défauts dépend de la machine (5 % pour A contre 7 % pour B , car $\frac{14}{200} = 0,07$). Connaître la machine modifie la probabilité d'un défaut.

Réponse. Non : $0,03 \neq 0,6 \times 0,058 = 0,0348$.

Correction de l'exercice 8 - Deux capteurs indépendants

L'indépendance permet de **multiplier** les probabilités.

Arbre des deux capteurs (P_i : « le capteur i tombe en panne ») ; l'indépendance se voit aux branches identiques du second niveau :



P_i : le capteur i tombe en panne

a) $P(\text{les deux}) = 0,05 \times 0,08 = 0,004$.

b) Chaque capteur fonctionne avec la probabilité $1 - p$: $0,95 \times 0,92 = 0,874$.

c) « Au moins un » est le contraire de « aucun » :

$$P(\text{au moins un}) = 1 - 0,874 = 0,126$$

— Soit 12,6 % de risque qu'au moins un capteur tombe en panne : c'est plus que chacun pris séparément, ce qui est logique.

Réponse. a) 0,004 · b) 0,874 · c) 0,126.

Correction de l'exercice 9 - Réunion de deux événements

Notons S et Q les deux formations : $P(S) = 0,3$, $P(Q) = 0,45$, $P(S \cap Q) = 0,15$.

a) Formule du cours :

$$P(S \cup Q) = P(S) + P(Q) - P(S \cap Q) = 0,3 + 0,45 - 0,15 = 0,6$$

— 60 % des salariés suivent au moins une formation.

b) Événement contraire : $1 - 0,6 = 0,4$, soit 40 % des salariés.

c) Test d'indépendance : $P(S) \times P(Q) = 0,3 \times 0,45 = 0,135$, alors que $P(S \cap Q) = 0,15$.

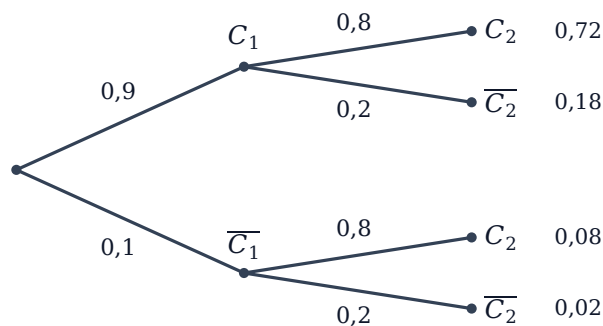
— $0,15 \neq 0,135$: les deux événements **ne sont pas indépendants**. Suivre la formation sécurité augmente légèrement la probabilité de suivre aussi celle de qualité.

Réponse. a) 0,6 · b) 0,4 · c) non ($0,15 \neq 0,135$).

Correction de l'exercice 10 - Problème : contrôle en deux étapes

Les deux contrôles sont indépendants : on multiplie.

Arbre des deux contrôles (C_i : « le contrôle i détecte le défaut ») :



C_i : le contrôle i détecte le défaut

a) $0,9 \times 0,8 = 0,72$.

b) Non-détection par le premier : $1 - 0,9 = 0,1$; par le second : $1 - 0,8 = 0,2$.

$$P(\text{aucune détection}) = 0,1 \times 0,2 = 0,02$$

— c) Contraire de b) : $1 - 0,02 = 0,98$.

— Conclusion pratique : doubler le contrôle fait passer la fiabilité de 90 % à 98 % — c'est tout l'intérêt de la redondance.

Réponse. a) 0,72 · b) 0,02 · c) 0,98.

Correction de l'exercice 11 - Lire un arbre donné

a) $P_E(D) = 0,03$ se lit sur la branche qui part de E vers D . C'est une probabilité **conditionnelle** : parmi les pièces de l'équipe de jour, 3 % sont défectueuses.

b) La probabilité d'un chemin est le **produit** des branches :

$$P(N \cap D) = P(N) \times P_N(D) = 0,4 \times 0,05 = 0,02$$

c) Deux chemins mènent à D ; on additionne :

$$P(D) = 0,6 \times 0,03 + 0,4 \times 0,05 = 0,018 + 0,02 = 0,038$$

d) On remonte l'arbre :

$$P_D(N) = \frac{P(N \cap D)}{P(D)} = \frac{0,02}{0,038} \approx 0,526$$

L'équipe de nuit ne fabrique que 40 % des pièces, mais plus de la moitié des pièces défectueuses.

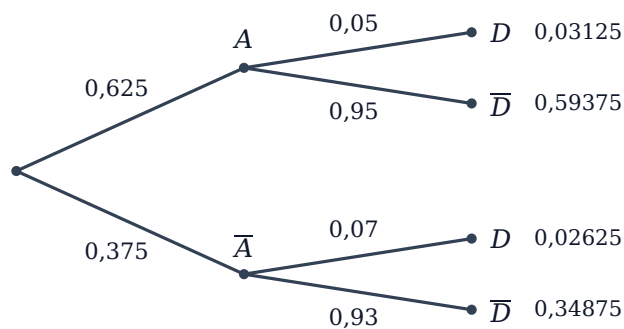
Réponse. a) 0,03 — b) 0,02 — c) 0,038 — d) $\approx 0,526$.

Correction de l'exercice 12 - Du tableau à l'arbre

a) La probabilité simple se calcule sur le total, les probabilités conditionnelles sur la ligne de la condition :

$$P(A) = \frac{500}{800} = 0,625 \quad P_A(D) = \frac{25}{500} = 0,05 \quad P_B(D) = \frac{21}{300} = 0,07$$

b) Premier niveau : $P(A) = 0,625$ et $P(B) = 0,375$. Second niveau : les taux de défaut de chaque site et leurs compléments à 1.



L'arbre construit à partir du tableau

c) Formule des probabilités totales :

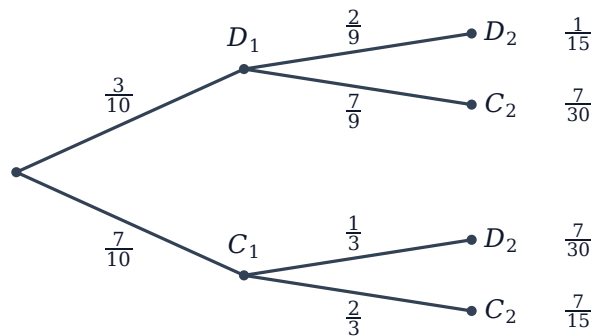
$$P(D) = 0,625 \times 0,05 + 0,375 \times 0,07 = 0,03125 + 0,02625 = 0,0575$$

Vérification par le tableau. $P(D) = \frac{46}{800} = 0,0575$. Les deux méthodes concordent : l'arbre et le tableau contiennent la même information.

Réponse. a) 0,625 ; 0,05 ; 0,07 — c) $P(D) = 0,0575$.

Correction de l'exercice 13 - Deux prélèvements sans remise

a) Au premier prélèvement : $P(D_1) = \frac{3}{10}$. Au second, il ne reste que 9 pièces : après une pièce défectueuse, il en reste 2 défectueuses ; après une pièce conforme, il en reste 3.



D : défectueuse, C : conforme (sans remise)

b) Chemin $D_1 \rightarrow D_2$:

$$P(D_1 \cap D_2) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$$

c) Deux chemins conviennent ($D_1 \rightarrow C_2$ et $C_1 \rightarrow D_2$), que l'on additionne :

$$P = \frac{3}{10} \times \frac{7}{9} + \frac{7}{10} \times \frac{1}{3} = \frac{21}{90} + \frac{7}{90} = \frac{28}{90} = \frac{14}{45}$$

d) Chemin $C_1 \rightarrow C_2$: $\frac{7}{10} \times \frac{2}{3} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$.

Contrôle. $\frac{1}{15} + \frac{7}{15} + \frac{7}{15} = 1$.

Réponse. b) $\frac{1}{15}$ — c) $\frac{7}{15}$ — d) $\frac{7}{15}$.

Correction de l'exercice 14 - L'indépendance se lit sur l'arbre

On rappelle que A et B sont indépendants lorsque

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

a) Par les probabilités totales :

— arbre 1 : $P(B) = 0,3 \times 0,6 + 0,7 \times 0,6 = 0,18 + 0,42 = 0,6$;

— arbre 2 : $P(B) = 0,3 \times 0,6 + 0,7 \times 0,5 = 0,18 + 0,35 = 0,53$.

b) Dans les deux arbres, $P(A \cap B) = 0,3 \times 0,6 = 0,18$.

— Arbre 1 : $P(A) \times P(B) = 0,3 \times 0,6 = 0,18$: **indépendants**.

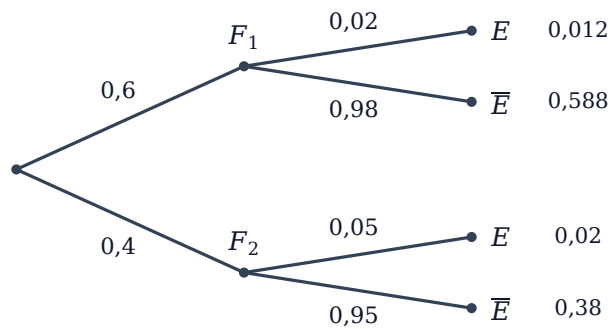
— Arbre 2 : $P(A) \times P(B) = 0,3 \times 0,53 = 0,159 \neq 0,18$: **pas indépendants**.

c) Sur un arbre, A et B sont indépendants lorsque la branche B porte **la même probabilité** sous A et sous $\bar{A}$: savoir si A est réalisé ne change pas la probabilité de B , et alors $P(B)$ vaut cette valeur commune.

Réponse. a) 0,6 et 0,53 — b) indépendants pour l'arbre 1, pas pour l'arbre 2 — c) mêmes branches sous A et sous $\bar{A}$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : arbre complet

On note E « le composant est défaillant » et l'on construit l'arbre :



E : le composant est défaillant

a) Probabilités totales :

$$P(E) = 0,6 \times 0,02 + 0,4 \times 0,05 = 0,012 + 0,02 = 0,032$$

— Soit 3,2 % des composants.

b) $P_E(F_2) = \frac{P(F_2 \cap E)}{P(E)} = \frac{0,02}{0,032} = 0,625.$

— Alors que F_2 ne fournit que 40 % des composants, il est responsable de 62,5 % des défaillances.

c) Test : $P(F_2) \times P(E) = 0,4 \times 0,032 = 0,0128$, contre $P(F_2 \cap E) = 0,02$.

— $0,02 \neq 0,0128$: les événements **ne sont pas indépendants**, ce qui était attendu puisque les deux fournisseurs n'ont pas le même taux de défaillance.

Réponse. a) 0,032 · b) 0,625 · c) non ($0,02 \neq 0,0128$).