

Plaquette 2 - Tableaux croisés et lecture conditionnelle

Probabilités conditionnelles et indépendance — Première STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Les trois lectures d'un tableau.

Ce qu'on cherche	Par quoi diviser
$P(A)$	le total général
$P(A \cap D)$	le total général
$P_A(D)$	le total de la ligne A

La formule.

$$P_A(D) = \frac{P(A \cap D)}{P(A)}$$

Avec des effectifs, les totaux se simplifient :

$$P_A(D) = \frac{\text{effectif } A \cap D}{\text{effectif } A}$$

Ne pas confondre.

Écriture	Question posée
$P_A(D)$	parmi les pièces de A, combien de défauts
$P_D(A)$	parmi les défauts, combien viennent de A

Le contraire conditionnel.

$$P_A(\overline{D}) = 1 - P_A(D)$$

Réunion.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

⚠ On ne compare jamais des effectifs bruts de lignes de tailles différentes : on compare des **taux**.

Correction de l'exercice 1 - Lire un tableau de production

On note A « la pièce vient de la machine A » et D « la pièce est défectueuse ». Pour une probabilité **simple** ou une **intersection**, on divise par l'effectif **total** :

$$P(A) = \frac{\text{effectif de } A}{\text{effectif total}}$$

- $P(A) = \frac{240}{400} = 0,6$: 60 % des pièces viennent de A ;
- $P(D) = \frac{24}{400} = 0,06$: 6 % des pièces sont défectueuses ;
- $P(A \cap D) = \frac{12}{400} = 0,03$: 3 % des pièces viennent de A **et** sont défectueuses.

Repère. L'intersection se lit dans une **case intérieure** du tableau, jamais dans une marge. Contrôle : $P(A \cap D) \leq P(A)$ et $P(A \cap D) \leq P(D)$.

Réponse. $P(A) = 0,6$, $P(D) = 0,06$, $P(A \cap D) = 0,03$.

Correction de l'exercice 2 - Deux conditionnelles à ne pas confondre

Pour une probabilité **conditionnelle**, on se restreint à la ligne (ou à la colonne) de la condition :

$$P_A(D) = \frac{\text{effectif de } A \cap D}{\text{effectif de } A}$$

a) Dans la ligne de la machine A (240 pièces) : $P_A(D) = \frac{12}{240} = 0,05$. Dans la ligne de B (160 pièces) : $P_B(D) = \frac{12}{160} = 0,075$.

b) Dans la colonne des défectueuses (24 pièces) : $P_D(A) = \frac{12}{24} = 0,5$.

Lecture. $P_A(D) = 0,05$: 5 % des pièces de A sont défectueuses. $P_D(A) = 0,5$: la moitié des pièces défectueuses vient de A. Ces deux nombres ont le même numérateur (12) mais pas la même population de référence.

Comparaison des machines. Les deux machines produisent autant de pièces défectueuses (12 chacune), mais B a un taux de défaut plus élevé (7,5 % contre 5 %), car elle produit moins.

Réponse. a) $P_A(D) = 0,05$ et $P_B(D) = 0,075$ — b) $P_D(A) = 0,5$.

Correction de l'exercice 3 - Compléter un tableau

On utilise que, dans chaque ligne et chaque colonne, les cases intérieures ont pour somme le total.

- **Ligne A** : conformes = $240 - 12 = 228$.
- **Colonne des défectueuses** : B a $24 - 12 = 12$ pièces défectueuses.
- **Colonne des totaux** : B a $400 - 240 = 160$ pièces au total.
- **Colonne des conformes** : $228 + 148 = 376$.

Effectifs	Conformes	Défectueuses	Total
Machine A	228	12	240
Machine B	148	12	160
Total	376	24	400

Contrôles. Ligne B : $148 + 12 = 160$; total général : $376 + 24 = 400$.

Réponse. 228 ; 12 ; 160 ; 376.

Correction de l'exercice 4 - Deux types de défauts

On note V « la pièce a un défaut visuel » et M « elle a un défaut dimensionnel ».

a) On divise par l'effectif total 600 :

$$P(V) = \frac{60}{600} = 0,1 \quad P(M) = \frac{45}{600} = 0,075 \quad P(V \cap M) = \frac{15}{600} = 0,025$$

b) Une pièce a au moins un défaut si elle est dans V ou dans M . On applique la formule de la réunion :

$$P(V \cup M) = P(V) + P(M) - P(V \cap M) = 0,1 + 0,075 - 0,025 = 0,15$$

Pourquoi retrancher 0,025 ? Les 15 pièces ayant les deux défauts sont comptées dans V et dans M : sans correction, on les compterait deux fois. En effectifs : $60 + 45 - 15 = 90$

pièces sur 600.

Réponse. a) 0,1 ; 0,075 ; 0,025 — b) $P(V \cup M) = 0,15$.

Correction de l'exercice 5 - Conditionnelles croisées

On restreint l'univers à la condition, et l'on divise l'effectif commun (15 pièces) par l'effectif de la condition :

$$P_V(M) = \frac{15}{60} = 0,25 \quad P_M(V) = \frac{15}{45} = \frac{1}{3} \approx 0,333$$

b) Interprétations :

- $P_V(M) = 0,25$: parmi les pièces ayant un défaut **visuel**, un quart a aussi un défaut dimensionnel ;
- $P_M(V) \approx 0,333$: parmi les pièces ayant un défaut **dimensionnel**, un tiers a aussi un défaut visuel.

Comparaison. $P_V(M) = 0,25$ dépasse $P(M) = 0,075$: avoir un défaut visuel rend un défaut dimensionnel plus probable. Les deux types de défaut ne sont donc pas indépendants ; ils ont sans doute une cause commune.

Réponse. a) $P_V(M) = 0,25$ et $P_M(V) = \frac{1}{3}$ — b) voir les interprétations.

Correction de l'exercice 6 - Un tableau d'indépendance

On note E « le véhicule est à essence » et O « il a l'option ». On teste l'égalité

$$P(E \cap O) = P(E) \times P(O)$$

- $P(E) = \frac{600}{1000} = 0,6$ et $P(O) = \frac{300}{1000} = 0,3$, donc $P(E) \times P(O) = 0,18$;
- $P(E \cap O) = \frac{180}{1000} = 0,18$.

L'égalité est vérifiée : les événements sont **indépendants**.

Lecture par les taux. La proportion de véhicules avec option est la même pour les deux motorisations : $\frac{180}{600} = 0,3$ (essence) et $\frac{120}{400} = 0,3$ (diesel). Le choix de l'option ne dépend pas de la motorisation.

Réponse. Oui : $P(E \cap O) = 0,18 = 0,6 \times 0,3$.

Correction de l'exercice 7 - Trois machines

a) Le taux de défaut d'une machine est la probabilité conditionnelle $P_M(D)$: on divise par l'effectif de la machine, pas par 200.

- machine A : $\frac{4}{80} = 0,05$;
- machine B : $\frac{7}{70} = 0,1$;
- machine C : $\frac{5}{50} = 0,1$.

b) Le taux global est une probabilité simple :

$$P(D) = \frac{16}{200} = 0,08$$

Comparaison. B et C ont le même taux (10 %), le double de celui de A ; le taux global (8 %) est compris entre 5 % et 10 %, plus proche de 10 % car B et C produisent ensemble 120 pièces sur 200.

Piège. B produit plus de pièces défectueuses que C (7 contre 5), mais ce n'est pas une

raison de la juger moins fiable : on compare des **taux**.

Réponse. a) 0,05 ; 0,1 ; 0,1 — b) $P(D) = 0,08$.

Correction de l'exercice 8 - Remonter à la machine

On se restreint à la colonne des pièces défectueuses (16 pièces) :

$$P_D(B) = \frac{\text{effectif de } B \cap D}{\text{effectif de } D}$$

a) $P_D(B) = \frac{7}{16} = 0,4375$.

b) De même, $P_D(A) = \frac{4}{16} = 0,25$ et $P_D(C) = \frac{5}{16} = 0,3125$, et
 $0,25 + 0,4375 + 0,3125 = 1$

C'est normal : une pièce défectueuse vient forcément de l'une des trois machines, et d'une seule.

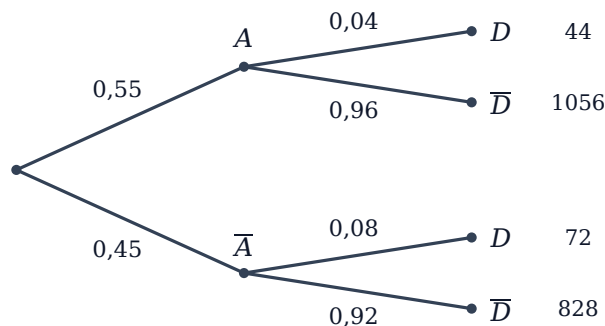
À ne pas confondre. $P_D(B) = 0,4375$ (part de B parmi les défauts) n'est pas $P_B(D) = 0,1$ (taux de défaut de B).

Réponse. a) $P_D(B) = 0,4375$ — b) $0,25 + 0,4375 + 0,3125 = 1$.

Correction de l'exercice 9 - Des probabilités aux effectifs

On multiplie l'effectif total par les probabilités, en suivant l'arbre.

- **Premier niveau** : $2000 \times 0,55 = 1100$ pièces de A, donc 900 pièces de $\bar{A}$.
- **Chemins** : $1100 \times 0,04 = 44$ pièces de A défectueuses, $900 \times 0,08 = 72$ pièces de $\bar{A}$ défectueuses.



Au bout des chemins : effectifs sur 2000 pièces

Le tableau des effectifs s'en déduit par soustractions :

Effectifs	D	$\bar{D}$	Total
A	44	1056	1100
$\bar{A}$	72	828	900
Total	116	1884	2000

Contrôle. $44 + 1056 + 72 + 828 = 2000$, et
 $P(D) = \frac{116}{2000} = 0,058 = 0,55 \times 0,04 + 0,45 \times 0,08$.

Réponse. A : 44 défectueuses, 1056 conformes ; $\bar{A}$: 72 et 828 ; total 116 défectueuses.

Correction de l'exercice 10 - Le contraire d'une conditionnelle

a) Dans l'univers restreint à A , une pièce est soit défectueuse, soit conforme :

$$P_A(\overline{D}) = 1 - P_A(D) = 1 - 0,05 = 0,95$$

b) **Non.** $P_{\overline{A}}(D)$ est le taux de défaut **dans une autre population**, celle des pièces qui ne viennent pas de A . Rien ne le relie à $P_A(D)$: il faut une donnée supplémentaire pour le connaître.

La règle. Le passage au contraire se fait sur l'événement **après** la barre, jamais sur la condition :

$$P_A(\overline{D}) = 1 - P_A(D) \quad \text{mais} \quad P_{\overline{A}}(D) \neq 1 - P_A(D) \text{ en général}$$

Avec le tableau de l'exercice 1, par exemple, $P_A(D) = 0,05$ et $P_{\overline{A}}(D) = 0,075$.

Réponse. a) 0,95 — b) non : $P_{\overline{A}}(D)$ ne se déduit pas de $P_A(D)$.

Correction de l'exercice 11 - Un tableau en pourcentages

On note C « la pièce est contrôlée » et 1 « la pièce vient de l'atelier 1 ». Les valeurs du tableau sont des pourcentages de l'ensemble.

a) $P(C) = 0,66$ (total de la colonne). Pour $P_1(C)$, on se restreint à la ligne de l'atelier 1 :

$$P_1(C) = \frac{P(1 \cap C)}{P(1)} = \frac{0,42}{0,60} = 0,7$$

b) On teste $P(1 \cap C) = P(1) \times P(C)$:

$$P(1) \times P(C) = 0,60 \times 0,66 = 0,396 \neq 0,42$$

Les événements ne sont **pas indépendants**. On le voit aussi par les taux : 70 % des pièces de l'atelier 1 sont contrôlées, contre 66 % en moyenne (et $\frac{24}{40} = 60\%$ dans l'atelier 2).

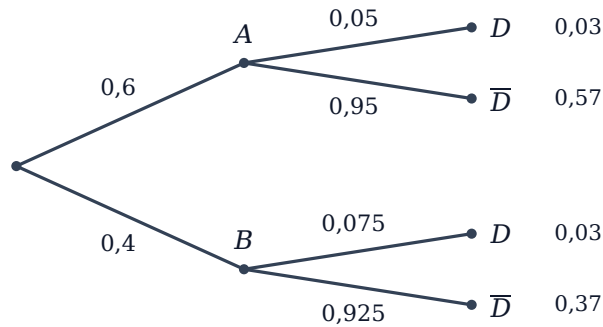
Réponse. a) $P(C) = 0,66$ et $P_1(C) = 0,7$ — b) non : $0,42 \neq 0,396$.

Correction de l'exercice 12 - Une addition interdite

L'erreur. L'élève additionne deux taux qui portent sur des **populations différentes** (les pièces de A , les pièces de B). Ce ne sont pas des parts d'un même tout : leur somme n'a pas de sens.

Le bon calcul. Chaque taux doit être **pondéré** par la part de sa machine. C'est la formule des probabilités totales, avec $P(A) = \frac{240}{400} = 0,6$ et $P(B) = 0,4$:

$$P(D) = P(A) \times P_A(D) + P(B) \times P_B(D)$$



Les deux taux sont pondérés par $P(A)$ et $P(B)$

$$P(D) = 0,6 \times 0,05 + 0,4 \times 0,075 = 0,03 + 0,03 = 0,06$$

Contrôle. Le tableau donne directement $P(D) = \frac{24}{400} = 0,06$. Et un taux global est toujours compris entre les taux des sous-populations (5 % et 7,5 %) : 12,5 % était impossible.

Réponse. $P(D) = 0,6 \times 0,05 + 0,4 \times 0,075 = 0,06$.

Correction de l'exercice 13 - Comparer deux fournisseurs

Les deux fournisseurs ne livrent pas le même nombre de pièces : on compare leurs **taux de défaut**, c'est-à-dire les probabilités conditionnelles.

$$P_A(D) = \frac{18}{600} = 0,03 \quad P_B(D) = \frac{14}{350} = 0,04$$

Le fournisseur **A** est le plus fiable : 3 % de défauts contre 4 %.

Le piège. A livre plus de pièces défectueuses que B (18 contre 14) ; conclure que B est meilleur serait une erreur, car A livre près de deux fois plus de pièces.

Réponse. A (3 % de défauts contre 4 % pour B).

Correction de l'exercice 14 - Retrouver une intersection

a) On connaît $P(A)$ et la probabilité conditionnelle $P_A(D)$: la formule des probabilités composées donne l'intersection.

$$P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D) = 0,45 \times 0,08 = 0,036$$

3,6 % des pièces viennent de A **et** sont défectueuses.

b) Sur 4000 pièces, l'effectif attendu est

$$4000 \times 0,036 = 144 \text{ pièces}$$

Vérification par un raisonnement direct. 45 % de 4000 font 1800 pièces de A, dont 8 % sont défectueuses : $1800 \times 0,08 = 144$.

Réponse. a) 0,036 — b) 144 pièces.

Correction de l'exercice 15 - Un tableau à trois colonnes

On note R « l'appareil est reconditionné ».

a) Probabilité simple, sur l'ensemble des 400 appareils :

$$P(R) = \frac{150}{400} = 0,375$$

b) Probabilités conditionnelles, ligne par ligne :

$$P_1(R) = \frac{60}{200} = 0,3 \quad P_2(R) = \frac{90}{200} = 0,45$$

Le taux de reconditionnement n'est pas le même sur les deux sites (30 % contre 45 %) : l'état des appareils **dépend du site**. Le taux global 0,375 est la moyenne des deux, car les deux sites ont le même effectif.

Réponse. a) $P(R) = 0,375$ — b) $P_1(R) = 0,3$ et $P_2(R) = 0,45$: l'état dépend du site.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : un contrôle complet

a) On se restreint à la ligne de la machine B (160 pièces), dont 148 sont conformes :

$$P_B(\overline{D}) = \frac{148}{160} = 0,925$$

On peut aussi passer par le contraire : $P_B(D) = \frac{12}{160} = 0,075$, et $1 - 0,075 = 0,925$.

b) On teste $P(A \cap D) = P(A) \times P(D)$:

$$P(A) \times P(D) = \frac{240}{400} \times \frac{24}{400} = 0,6 \times 0,06 = 0,036 \quad P(A \cap D) = \frac{12}{400} = 0,03$$

$0,03 \neq 0,036$: A et D ne sont **pas indépendants** (A a un taux de défaut plus faible que la moyenne).

c) Sur 1000 pièces, B en produirait $1000 \times 0,075 = 75$ défectueuses et A $1000 \times 0,05 = 50$: B en produirait 25 **de plus**.

Réponse. a) 0,925 — b) non ($0,03 \neq 0,036$) — c) 25 pièces défectueuses de plus.