MATHÉMATIQUES

Probabilités conditionnelles et indépendance

Première STI2D

Probabilité conditionnelle • Tableau croisé • Arbre pondéré
Probabilités totales • Indépendance • Fiabilité d'un système

Repères du programme

Ce cours suit le **programme de mathématiques du tronc commun de la voie technologique, classe de première** (arrêté du 26 février 2026, BO du 2 avril 2026, rentrée 2026), partie « Statistiques et probabilités », section « Probabilités conditionnelles : indépendance », ainsi que les automatismes de probabilités. Il couvre :

- probabilités conditionnelles dans un tableau croisé d'effectifs ou un arbre pondéré ; distinguer $P(A \cap B)$, $P_A(B)$ et $P_B(A)$;
- formule des probabilités totales dans des cas simples ;
- indépendance de deux événements : définition $P_A(B) = P(B)$, symétrie, utilisation et justification.

Objectif : calculer des probabilités conditionnelles à partir d'un tableau ou d'un arbre, utiliser la formule des probabilités totales et reconnaître deux événements indépendants.

Document pédagogique – mathlvl.fr

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Table des matières

1 Probabilités conditionnelles **3**

2 Arbres pondérés et probabilités totales **4**

3 Indépendance de deux événements **4**

4 Erreurs classiques **5**

5 Fiche de synthèse **6**

6 Exercices d'application **6**

7 Corrigés des exercices **6**

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

1. Probabilités conditionnelles

Probabilité de B sachant A

Pour un événement A de probabilité non nulle :

$$\boxed{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}} \qquad \text{d'où} \qquad P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B).$$

Dans un tirage au hasard dans une population, $P_A(B)$ est la proportion d'individus de B **parmi** ceux de A.

Pièces de deux machines

Un atelier a produit 500 pièces :

	Défectueuse (D)	Conforme	Total
Machine M_1	12	288	300
Machine M_2	16	184	200
Total	28	472	500

On prélève une pièce au hasard :

- $P(M_1 \cap D) = \frac{12}{500} = 0{,}024$: la pièce vient de M_1 **et** est défectueuse ;
- $P_{M_1}(D) = \frac{12}{300} = 0{,}04$: parmi les pièces de M_1, 4 % sont défectueuses ;
- $P_D(M_1) = \frac{12}{28} \approx 0{,}43$: parmi les pièces défectueuses, 43 % viennent de M_1.

Lire le bon dénominateur

« Parmi les A » : on divise par l'effectif de A (sa marge). « A et B » : on divise par l'effectif total.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

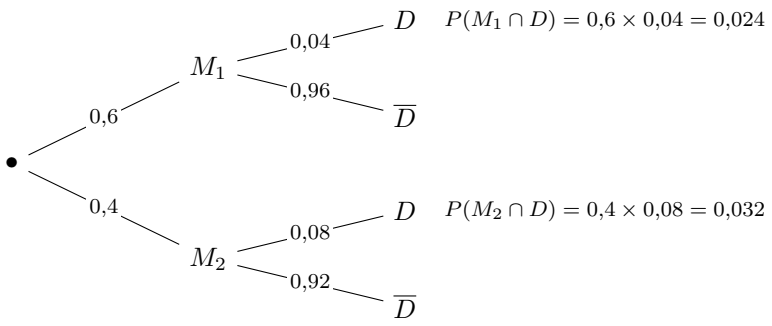
2. Arbres pondérés et probabilités totales

Règles des arbres

— Les branches issues d'un même nœud totalisent 1 ; au second niveau, elles portent des probabilités **conditionnelles**.

— La probabilité d'un chemin est le **produit** des probabilités de ses branches.

— La probabilité d'un événement réalisé par plusieurs chemins est la **somme** de leurs probabilités.



L'atelier en arbre : 60 % des pièces viennent de M_1, 40 % de M_2.

Formule des probabilités totales

Les événements A et $\overline{A}$ partagent l'univers, donc pour tout événement B :

$$\boxed{P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)}$$

Sur l'arbre : on additionne les chemins qui mènent à B.

$P(D) = 0{,}024 + 0{,}032 = 0{,}056$ (on retrouve $\frac{28}{500}$). Une pièce est défectueuse : elle vient de M_1 avec la probabilité $P_D(M_1) = \frac{0{,}024}{0{,}056} \approx 0{,}43$.

Inverser le conditionnement

On connaît $P_A(B)$ et l'on cherche $P_B(A)$: on calcule $P(A \cap B)$ (un chemin), puis $P(B)$ (probabilités totales), et enfin $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

3. Indépendance de deux événements

Événements indépendants

Pour $P(A) \neq 0$, l'événement B est **indépendant** de A si $P_A(B) = P(B)$: savoir que A est réalisé ne change pas la probabilité de B.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Caractérisation et symétrie

Pour $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$:

$$P_A(B) = P(B) \iff \boxed{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)} \iff P_B(A) = P(A).$$

L'indépendance est donc **symétrique** : on dit que A et B sont indépendants.

Démonstration. Si $P_A(B) = P(B)$, alors $P(A \cap B) = P(A)P_A(B) = P(A)P(B)$, puis $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$. Le raisonnement se fait de même dans l'autre sens.

Justifier une dépendance

Dans l'atelier, $P(D) = 0{,}056$ mais $P_{M_1}(D) = 0{,}04$: $P_{M_1}(D) \neq P(D)$, donc D et M_1 ne sont pas indépendants (la machine M_1 produit moins de défauts que la moyenne).

Utiliser une indépendance : fiabilité

Deux composants tombent en panne de façon indépendante, C_1 avec la probabilité 0,02 et C_2 avec la probabilité 0,05 sur un an.

- **Montage en série** (le système fonctionne si les deux fonctionnent) : $P = 0{,}98 \times 0{,}95 = 0{,}931$.
- **Montage en parallèle** (il tombe en panne seulement si les deux tombent en panne) : $P(\text{panne}) = 0{,}02 \times 0{,}05 = 0{,}001$, donc il fonctionne avec la probabilité 0,999.

Indépendants ou incompatibles ?

Incompatibles : $A \cap B = \varnothing$, ils ne peuvent pas se produire ensemble. Indépendants : l'un n'influence pas la probabilité de l'autre. Deux événements incompatibles de probabilités non nulles ne sont **jamais** indépendants ($P(A \cap B) = 0 \neq P(A)P(B)$).

4. Erreurs classiques

À éviter

- Confondre $P(A \cap B)$, $P_A(B)$ et $P_B(A)$.
- Placer une probabilité non conditionnelle sur une branche du second niveau.
- Oublier un chemin dans la formule des probabilités totales.
- Confondre indépendants et incompatibles.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

5. Fiche de synthèse

Conditionnelle	$P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$; tableau : case / marge de A
Arbre	branches d'un nœud : somme 1 ; chemin : produit ; plusieurs chemins : somme
Probabilités totales	$P(B) = P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)$
Indépendance	$P_A(B) = P(B) \iff P(A\cap B) = P(A)P(B)$; symétrique
Fiabilité	série : produit des fiabilités ; parallèle : panne si toutes en panne

6. Exercices d'application

Exercice 1 – Tableau croisé

Avec le tableau de l'atelier, calculer $P_{M_2}(D)$ et $P_D(M_2)$.

Exercice 2 – Indépendance

$P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}5$ et $P(A\cap B) = 0{,}12$. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 3 – Capteur de contrôle

2 % des pièces d'une chaîne sont non conformes (N). Un capteur déclenche une alarme (A) pour 95 % des pièces non conformes et, par erreur, pour 3 % des pièces conformes. Calculer $P(A)$, puis la probabilité qu'une pièce ayant déclenché l'alarme soit réellement non conforme.

Exercice 4 – Deux pompes

Une installation possède deux pompes en parallèle, qui tombent en panne de façon indépendante avec la probabilité 0,1 chacune. Quelle est la probabilité qu'au moins une pompe fonctionne ?

7. Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

Corrigé. $P_{M_2}(D) = \dfrac{16}{200} = 0{,}08$; $P_D(M_2) = \dfrac{16}{28} \approx 0{,}57$.

Corrigé de l'exercice 2

Corrigé. $P(A)\times P(B) = 0{,}15 \neq 0{,}12 = P(A\cap B)$: A et B ne sont pas indépendants.

Corrigé de l'exercice 3

Corrigé. $P(A) = 0{,}02\times 0{,}95 + 0{,}98\times 0{,}03 = 0{,}019 + 0{,}029\,4 = 0{,}048\,4$. Puis $P_A(N) = \dfrac{0{,}019}{0{,}048\,4} \approx 0{,}39$: moins de 40 % des alarmes concernent une pièce vraiment non conforme.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigé de l'exercice 4

Corrigé. Les deux pompes sont en panne avec la probabilité $0{,}1 \times 0{,}1 = 0{,}01$ (indépendance). Au moins une fonctionne : $1 - 0{,}01 = 0{,}99$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite. Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).