

Plaquette 5 – Al-Kashi : longueurs et angles d'un triangle quelconque

Produit scalaire — Première STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Théorème d'Al-Kashi. Dans un triangle ABC :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos \hat{A}$$

- On l'appelle aussi « loi des cosinus » ou « Pythagore généralisé ».
- Si $\hat{A} = 90^\circ$, alors $\cos \hat{A} = 0$ et la formule redonne $BC^2 = AB^2 + AC^2$: le théorème de Pythagore.

Les trois écritures. En notant $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B} \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

Pour trouver un angle, on isole le cosinus :

$$\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Signe de $\cos \hat{A}$	Angle
positif	aigu
nul	droit
négatif	obtus

Contrôles indispensables.

- La somme des trois angles vaut 180° .
- Le plus grand angle est **en face** du plus grand côté.
- Inégalité triangulaire : chaque côté est plus petit que la somme des deux autres.
- ⚠ Le côté calculé est celui **opposé** à l'angle utilisé : se tromper d'angle est l'erreur la plus fréquente.

Correction de l'exercice 1 – Un côté avec un angle de 60°

On connaît deux côtés et l'angle qu'ils forment : le théorème d'Al-Kashi donne le troisième côté.

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos \hat{A} = 49 + 25 - 70 \times 0,5 = 39$$

donc $BC = \sqrt{39} \approx 6,245$.

Contrôle : un côté d'un triangle est toujours compris entre la différence et la somme des deux autres, ici entre 2 et 12. Avec un angle de 60° , plus petit que l'angle droit, BC est aussi plus court que l'hypoténuse qu'on obtiendrait à 90° , $\sqrt{74} \approx 8,6$.

Réponse. $BC = \sqrt{39} \approx 6,245$.

Correction de l'exercice 2 – Un angle obtus

On applique Al-Kashi avec $\cos 120^\circ = -0,5$:

$$BC^2 = 64 + 36 - 2 \times 8 \times 6 \times (-0,5) = 100 + 48 = 148$$

donc $BC = \sqrt{148} \approx 12,166$.

Attention au signe : soustraire $96 \times (-0,5) = -48$ revient à **ajouter** 48. C'est cohérent : un angle obtus « ouvre » le triangle, et le côté opposé est plus long que dans le cas de l'angle droit ($\sqrt{100} = 10$), tout en restant inférieur à $8 + 6 = 14$.

Réponse. $BC = \sqrt{148} \approx 12,166$.

Correction de l'exercice 3 - Un angle de 45°

On applique Al-Kashi avec $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7071$:

$$BC^2 = 81 + 144 - 2 \times 9 \times 12 \times \cos 45^\circ \approx 225 - 152,74 = 72,26$$

donc $BC \approx 8,50$.

Contrôle : si l'angle était nul, les côtés seraient superposés et BC vaudrait $12 - 9 = 3$; s'il était droit, BC vaudrait $\sqrt{225} = 15$. L'angle de 45° donne bien une valeur intermédiaire.

Réponse. $BC \approx 8,50$.

Correction de l'exercice 4 - Quand Al-Kashi redonne Pythagore

Avec Al-Kashi : $\cos 90^\circ = 0$, donc le terme soustrait est nul :

$$BC^2 = 9 + 16 - 2 \times 3 \times 4 \times 0 = 25 \quad BC = 5$$

Avec Pythagore : le triangle est rectangle en A , donc $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 9 + 16 = 25$, et $BC = 5$.

Les deux méthodes concordent, et ce n'est pas un hasard : le théorème de Pythagore est le cas particulier d'Al-Kashi pour un angle droit. Une seule formule suffit ainsi pour tous les triangles, le terme $-2bc \cos \hat{A}$ mesurant l'écart au cas rectangle.

Réponse. $BC = 5$ dans les deux cas.

Correction de l'exercice 5 - Calculer un angle

On isole $\cos \hat{A}$ dans Al-Kashi, avec $a = BC = 7$ (côté opposé à $\hat{A}$), $b = CA = 5$ et $c = AB = 6$:

$$\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{25 + 36 - 49}{2 \times 5 \times 6} = \frac{12}{60} = 0,2$$

d'où $\hat{A} \approx 78,46^\circ$.

Le cosinus est positif, l'angle est aigu. **Contrôle** : $\hat{A}$ fait face au plus long côté, $BC = 7$; ce doit être le plus grand angle du triangle, ce que confirmera le calcul des deux autres.

Réponse. $\hat{A} \approx 78,46^\circ$.

Correction de l'exercice 6 - Les trois angles

On applique la même formule, en plaçant chaque fois au numérateur le carré du côté **opposé** avec un signe moins.

$$\cos \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{49 + 36 - 25}{84} = \frac{60}{84} \approx 0,7143 \quad \hat{B} \approx 44,42^\circ$$

$$\cos \hat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{49 + 25 - 36}{70} = \frac{38}{70} \approx 0,5429, \text{ d'où } \hat{C} \approx 57,12^\circ.$$

Vérification : $78,46 + 44,42 + 57,12 = 180,00^\circ$. Les tailles sont cohérentes : le plus petit angle, $\hat{B}$, fait face au plus petit côté, $CA = 5$.

Réponse. $\hat{B} \approx 44,42^\circ$ et $\hat{C} \approx 57,12^\circ$; la somme vaut bien 180° .

Correction de l'exercice 7 - Un triangle obtusangle

On vérifie d'abord que le triangle existe : $4 + 6 = 10 > 9$. Puis on isole le cosinus de l'angle opposé au côté $a = 9$:

$$\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{16 + 36 - 81}{48} = \frac{-29}{48} \approx -0,6042$$

d'où $\hat{A} \approx 127,17^\circ$.

L'angle est **obtus** : le triangle est obtusangle. Le signe se voyait dès le numérateur : $a^2 = 81$ dépasse $b^2 + c^2 = 52$. Plus généralement, l'angle opposé au plus grand côté est obtus, droit ou aigu selon que a^2 est supérieur, égal ou inférieur à $b^2 + c^2$.

Réponse. $\hat{A} \approx 127,17^\circ$: le triangle est obtusangle.

Correction de l'exercice 8 - Un angle dans une pièce mécanique

L'angle $\hat{B}$ est formé par les côtés $[BA]$ et $[BC]$; le côté opposé est $AC = 9$ cm. On isole le cosinus dans Al-Kashi :

$$\cos \hat{B} = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \times AB \times BC} = \frac{100 + 144 - 81}{240} = \frac{163}{240} \approx 0,6792$$

d'où $\hat{B} \approx 47,22^\circ$.

Contrôle : AC est le plus petit côté, donc $\hat{B}$, qui lui fait face, est le plus petit angle de la pièce. C'est cet angle qu'il faut programmer sur la machine de découpe.

Réponse. $\hat{B} \approx 47,22^\circ$.

Correction de l'exercice 9 - Un bras de robot

L'épaule, le coude et la pince forment un triangle dont on connaît deux côtés, 40 et 30 cm, et l'angle compris, 110° au coude. Al-Kashi donne la distance d entre l'épaule et la pince :

$$d^2 = 40^2 + 30^2 - 2 \times 40 \times 30 \times \cos 110^\circ \approx 2\,500 + 2\,400 \times 0,342 \approx 3\,320,85$$

donc $d \approx 57,63$ cm.

Comme $\cos 110^\circ < 0$, le terme soustrait est négatif et s'ajoute : le coude ouvert au-delà de l'angle droit éloigne la pince. **Contrôle** : la distance reste inférieure à la portée maximale du bras tendu, $40 + 30 = 70$ cm.

Réponse. Environ 57,63 cm.

Correction de l'exercice 10 - Régler l'angle du coude

On cherche l'angle θ au coude pour que le côté opposé mesure 50 cm. On isole le cosinus dans Al-Kashi :

$$\cos \theta = \frac{40^2 + 30^2 - 50^2}{2 \times 40 \times 30} = \frac{1\,600 + 900 - 2\,500}{2\,400} = 0$$

donc $\theta = 90^\circ$: le coude doit être plié à angle droit.

On reconnaît le triplet de Pythagore (30 ; 40 ; 50), puisque $900 + 1\,600 = 2\,500$. Le bras peut atteindre toute distance entre $40 - 30 = 10$ cm (coude replié) et 70 cm (bras tendu) : 50 cm est bien accessible.

Réponse. Un angle de 90° (triplet 30-40-50).

Correction de l'exercice 11 - Une charpente

Les deux pans et la portée forment un triangle dont on connaît deux côtés et l'angle compris au faîte. Al-Kashi donne la portée p :

$$p^2 = 4,2^2 + 3,6^2 - 2 \times 4,2 \times 3,6 \times \cos 100^\circ \approx 30,60 + 30,24 \times 0,1736 \approx 35,85$$

donc $p \approx 5,99$ m.

Comme $\cos 100^\circ < 0$, le terme soustrait s'ajoute. **Contrôle** : la portée est inférieure à $4,2 + 3,6 = 7,8$ m et supérieure à la valeur obtenue à angle droit, $\sqrt{30,60} \approx 5,53$ m. C'est la longueur de l'entrait à commander.

Réponse. Environ 5,99 m.

Correction de l'exercice 12 - Un triangle impossible

Première méthode : l'inégalité triangulaire. Dans un triangle, chaque côté est inférieur à la somme des deux autres. Or $3 + 4 = 7 < 9$: les deux petits côtés ne peuvent pas se rejoindre, le triangle n'existe pas.

Seconde méthode : Al-Kashi. L'angle opposé au côté de 9 m devrait vérifier

$$\cos \hat{A} = \frac{9 + 16 - 81}{2 \times 3 \times 4} = \frac{-56}{24} \approx -2,33$$

Or un cosinus est toujours compris entre -1 et 1 : aucun angle ne convient.

Les deux méthodes concordent : le relevé est faux. Réflexe de contrôle : vérifier l'inégalité triangulaire avant tout calcul d'angle.

Réponse. $3 + 4 = 7 < 9$: le triangle n'existe pas (et Al-Kashi donnerait $\cos \hat{A} \approx -2,33$, impossible).

Correction de l'exercice 13 - Deux capteurs et une cible

Le triangle existe, car $38 + 45 = 83 > 50$. L'angle $\hat{A}$ est formé par $[AB]$ et $[AC]$; le côté opposé est $BC = 45$ m. Al-Kashi donne

$$\cos \hat{A} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \times AB \times AC} = \frac{2\,500 + 1\,444 - 2\,025}{3\,800} = \frac{1\,919}{3\,800} \approx 0,505$$

d'où $\hat{A} \approx 59,67^\circ$.

Le cosinus positif confirme un angle aigu. C'est l'angle dont il faut orienter le capteur A, depuis la direction de B, pour viser la cible.

Réponse. $\hat{A} \approx 59,67^\circ$.

Correction de l'exercice 14 - Deux côtés à partir d'un angle commun

a) Al-Kashi avec $AB = AC = 6$ et $\cos 40^\circ \approx 0,766$:

$$BC^2 = 36 + 36 - 2 \times 36 \times \cos 40^\circ \approx 72 - 55,15 = 16,85$$

donc $BC \approx 4,11$.

b) $AB = AC$: le triangle est isocèle en A, ses angles à la base sont égaux, et leur somme vaut $180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$. Donc $\hat{B} = \hat{C} = 70^\circ$.

Vérification par Al-Kashi : $\cos \hat{B} = \frac{BA^2 + BC^2 - AC^2}{2 \times BA \times BC} = \frac{16,85}{2 \times 6 \times 4,11} \approx 0,342$, et $\cos 70^\circ \approx 0,342$. Les deux méthodes concordent.

Réponse. a) $BC \approx 4,11$ · b) $\hat{B} = \hat{C} = 70^\circ$.

Correction de l'exercice 15 - Comparer deux triangles

Les deux équerres ont les mêmes côtés, 20 et 15 cm : seul change l'angle compris. Avec Al-Kashi, $c^2 = 625 - 600 \cos \theta$.

À 60° : $c^2 = 625 - 600 \times 0,5 = 325$, d'où $c \approx 18,03$ cm.

À 80° : $c^2 \approx 625 - 600 \times 0,1736 \approx 520,8$, d'où $c \approx 22,82$ cm.

$$c^2 = 625 - 600 \cos \theta$$

Plus l'angle est grand, plus le côté opposé est long : $\cos \theta$ diminue quand θ augmente, et l'on retranche moins. Aux cas limites, on obtiendrait $20 - 15 = 5$ cm pour $\theta = 0$ et $20 + 15 = 35$ cm pour $\theta = 180^\circ$.

Réponse. Environ 18,03 cm et 22,82 cm : plus l'angle est grand, plus le côté opposé est long.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : un mât haubané

a) L'angle en A est droit : Al-Kashi se réduit à Pythagore, $BC^2 = 81 + 36 = 117$, donc $BC = \sqrt{117} \approx 10,82$ m.

b) L'angle $\hat{C}$ est opposé au côté $AB = 9$:

$$\cos \hat{C} = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2 \times AC \times BC} = \frac{36 + 117 - 81}{2 \times 6 \times \sqrt{117}} \approx \frac{72}{129,8} \approx 0,5547$$

d'où $\hat{C} \approx 56,31^\circ$; **contrôle** : $90 + 56,31 + 33,69 = 180$.

c) Avec l'ancrage à 8 m : $BC^2 = 81 + 64 = 145$, donc $BC = \sqrt{145} \approx 12,04$ m, et $\cos \hat{C} = \frac{64 + 145 - 81}{2 \times 8 \times \sqrt{145}} \approx 0,664$, soit $\hat{C} \approx 48,37^\circ$: le hauban s'allonge et se couche.

d) Le hauban s'allonge d'environ $12,042 - 10,817 \approx 1,22$ m, ce qui coûte environ $1,22 \times 14 \approx 17$ €. Pour ce prix, le hauban est incliné de près de 8° de moins sur le sol.

Réponse. a) $\sqrt{117} \approx 10,82$ m · b) environ $56,31^\circ$ · c) $\sqrt{145} \approx 12,04$ m et environ $48,37^\circ$ · d) environ 17 € de plus.