

Plaquette 1 – Calculs, orthogonalité et travail d'une force

Produit scalaire — Première STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Formules du cours.

- Avec les coordonnées (repère orthonormé) : si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

- Avec les normes et l'angle : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \theta$, où θ est l'angle entre les deux vecteurs.

- Norme : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$, et $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.

- Orthogonalité : $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

- Angle : $\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$.

- Travail d'une force $\vec{F}$ sur un déplacement $\vec{d}$:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = \|\vec{F}\| \times \|\vec{d}\| \times \cos \theta \quad (\text{en joules})$$

- Propriétés : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ et $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.

- Théorème d'Al-Kashi dans un triangle ABC :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos \hat{A}$$

Correction de l'exercice 1 – Produit scalaire en coordonnées

On applique la formule $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

- $3 \times 4 + 2 \times (-1) = 12 - 2 = 10$.
- $-2 \times 5 + 5 \times 2 = -10 + 10 = 0$: les deux vecteurs sont **orthogonaux**.
- $1 \times 1 + 7 \times 7 = 1 + 49 = 50$. On retrouve $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$, avec $\|\vec{u}\| = \sqrt{50}$.

Réponse. a) 10 · b) 0 (orthogonaux) · c) 50.

Correction de l'exercice 2 – Tester l'orthogonalité

Critère du cours : deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6 \times 2 + (-4) \times 3 = 12 - 12 = 0$: **oui**, $\vec{u} \perp \vec{v}$.
- $\vec{u} \cdot \vec{w} = 6 \times 3 + (-4) \times 5 = 18 - 20 = -2 \neq 0$: **non**, ils ne sont pas orthogonaux.

Réponse. $\vec{u} \perp \vec{v}$ (produit nul) ; $\vec{u}$ et $\vec{w}$ non orthogonaux (-2).

Correction de l'exercice 3 – Norme d'un vecteur

Formule du cours : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

- $\|\vec{u}\| = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$.
- $\|\vec{v}\| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$.
- Ce sont deux triplets pythagoriciens classiques (5-12-13 et 3-4-5) : les normes sont entières.

Réponse. $\|\vec{u}\| = 13$ et $\|\vec{v}\| = 5$.

Correction de l'exercice 4 - Produit scalaire avec l'angle

Formule du cours : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \theta$.

- a) $\cos 60^\circ = 0,5$, donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6 \times 4 \times 0,5 = 12$.
- b) Pour 90° : $\cos 90^\circ = 0$, donc le produit scalaire est **nul** (vecteurs orthogonaux).
- Pour 180° : $\cos 180^\circ = -1$, donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6 \times 4 \times (-1) = -24$ (vecteurs de sens opposés).
- À retenir : le signe du produit scalaire indique si l'angle est aigu (positif), droit (nul) ou obtus (négatif).

Réponse. a) 12 · b) 0 puis -24.

Correction de l'exercice 5 - Calculer un angle

On utilise la formule du cours $\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$.

- Produit scalaire : $3 \times 2 + 1 \times 4 = 10$.
- Normes : $\|\vec{u}\| = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$.
- Donc $\cos \theta = \frac{10}{\sqrt{10} \times \sqrt{20}} = \frac{10}{\sqrt{200}} \approx \frac{10}{14,142} \approx 0,707$.
- On reconnaît $\frac{\sqrt{2}}{2}$: $\theta = 45,0^\circ$.

Réponse. $\theta = 45,0^\circ$.

Correction de l'exercice 6 - Produit scalaire dans un triangle

a) On calcule d'abord les coordonnées des vecteurs.

- $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5 - 1 \\ 4 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 3 - 1 \\ 6 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 2 + 2 \times 4 = 8 + 8 = 16$.

b) Le produit scalaire vaut $16 \neq 0$: les vecteurs ne sont pas orthogonaux, donc le triangle **n'est pas** rectangle en A.

- Comme le produit est positif, l'angle en A est **aigu**.

Réponse. a) 16 · b) non (produit non nul), et l'angle en A est aigu.

Correction de l'exercice 7 - Déterminer un vecteur orthogonal

a) On cherche $\vec{v} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que $4x + 3y = 0$.

- Une solution simple : $x = 3$ et $y = -4$, car $12 - 12 = 0$.
- Donc $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ convient.

b) Une **infinité** : tous les vecteurs $\begin{pmatrix} 3k \\ -4k \end{pmatrix}$ avec k réel non nul sont orthogonaux à $\vec{u}$.

- Ils sont tous colinéaires entre eux : ils portent la même direction, perpendiculaire à celle de $\vec{u}$.
- Recette générale : pour $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, le vecteur $\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ est orthogonal.

Réponse. a) $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ · b) une infinité, tous colinéaires à $\vec{v}$.

Correction de l'exercice 8 - Travail d'une force colinéaire

Formule du cours : $W = \|\vec{F}\| \times \|\vec{d}\| \times \cos \theta$.

— La force est dans le sens du déplacement : $\theta = 0^\circ$ et $\cos 0^\circ = 1$.

$$W = 150 \times 20 \times 1 = 3\,000 \text{ J}$$

— Le travail est **positif** : la force est motrice, elle fournit de l'énergie au chariot.

Réponse. $W = 3\,000 \text{ J}$.

Correction de l'exercice 9 - Travail d'une force inclinée

Seule la composante de la force **dans la direction du déplacement** travaille : c'est exactement ce que traduit le cosinus.

$$W = \|\vec{F}\| \times \|\vec{d}\| \times \cos \theta = 200 \times 12 \times \cos 30^\circ$$

— $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866$.

— $W \approx 2\,400 \times 0,866 \approx 2\,078 \text{ J}$.

— Comparaison : avec la même force **horizontale**, le travail serait de 2 400 J.

L'inclinaison fait perdre environ 322 J : la composante verticale ne sert à rien pour un déplacement horizontal.

Réponse. $W \approx 2\,078 \text{ J}$.

Correction de l'exercice 10 - Force perpendiculaire au déplacement

a) Le poids est vertical, le déplacement horizontal : l'angle vaut 90° .

— $\cos 90^\circ = 0$, donc

$$W = 800 \times 5 \times 0 = 0 \text{ J}$$

b) Le travail du poids est **nul** : une force perpendiculaire au déplacement ne travaille pas.

— C'est une conséquence directe du critère d'orthogonalité : $\vec{F} \cdot \vec{d} = 0$ lorsque $\vec{F} \perp \vec{d}$.

— Concrètement, porter une charge à l'horizontale ne demande (idéalement) aucun travail contre la gravité.

Réponse. a) $W = 0 \text{ J}$ · b) une force perpendiculaire au déplacement ne travaille pas.

Correction de l'exercice 11 - Théorème d'Al-Kashi

On applique le théorème d'Al-Kashi :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos \hat{A}$$

— $BC^2 = 49 + 25 - 2 \times 7 \times 5 \times \cos 60^\circ$.

— $\cos 60^\circ = 0,5$, donc $BC^2 = 74 - 70 \times 0,5 = 74 - 35 = 39$.

— $BC = \sqrt{39} \approx 6,2 \text{ cm}$.

— Contrôle de vraisemblance : BC doit être entre $|7 - 5| = 2$ et $7 + 5 = 12$. C'est le cas.

— Remarque : si $\hat{A}$ valait 90° , le terme en cosinus disparaîtrait et l'on retrouverait le théorème de Pythagore.

Réponse. $BC = \sqrt{39} \approx 6,2 \text{ cm}$.

Correction de l'exercice 12 - Avec le projeté orthogonal

Le produit scalaire ne retient de $\overrightarrow{AC}$ que sa part dans la direction de $\overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AH}$:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$$

- $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont le même sens (H est entre A et B), donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH = 6 \times 4 = 24$.
- Si H était de l'autre côté de A , les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ seraient de sens contraires : on obtiendrait $-6 \times 4 = -24$, et l'angle $B\hat{A}C$ serait obtus.
- La hauteur CH n'intervient pas : seule compte la position du projeté.

Réponse. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 24$; il vaudrait -24 avec H de l'autre côté de A .

Correction de l'exercice 13 - Distance entre deux points

La distance AB est la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$, de coordonnées $(5 - (-1); 10 - 2) = (6; 8)$:

$$AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

- Le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ par lui-même vaut $6 \times 6 + 8 \times 8 = 100$, c'est-à-dire AB^2 .
- Attention au signe : $5 - (-1) = 6$, et non 4.
- On reconnaît le triplet 6-8-10, double du triplet 3-4-5.

Réponse. $AB = 10$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = 100$.

Correction de l'exercice 14 - Un angle avec Al-Kashi

L'angle $\hat{A}$ fait face au côté de 6 cm. On isole son cosinus dans Al-Kashi :

$$\cos \hat{A} = \frac{4^2 + 5^2 - 6^2}{2 \times 4 \times 5} = \frac{16 + 25 - 36}{40} = \frac{5}{40} = 0,125$$

- La calculatrice donne $\hat{A} \approx 82,8^\circ$.
- Le triangle **n'est pas** rectangle : il faudrait $\cos \hat{A} = 0$, c'est-à-dire $6^2 = 4^2 + 5^2$, or $36 \neq 41$.
- Comme $36 < 41$, l'angle est aigu, mais proche de l'angle droit.

Réponse. $\hat{A} \approx 82,8^\circ$; le triangle n'est pas rectangle.

Correction de l'exercice 15 - Synthèse : nature d'un triangle

a) $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

— $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times (-3) + 3 \times 4 = -12 + 12 = 0$.

b) Le produit scalaire est nul : les vecteurs sont orthogonaux, donc le triangle est **rectangle en A**.

— Normes : $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{16 + 9} = 5$ et $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{9 + 16} = 5$.

— Les deux côtés de l'angle droit sont égaux : le triangle est **rectangle isocèle en A**.

c) Dans un triangle rectangle, l'aire vaut la moitié du produit des côtés de l'angle droit :

$$A = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{5 \times 5}{2} = 12,5$$

— L'aire vaut 12,5 unités d'aire.

Réponse. a) 0 · b) rectangle isocèle en A · c) aire 12,5.