

Plaquette 3 – Normes, angles et projection

Produit scalaire – Première STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Les deux expressions du produit scalaire.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' \quad \text{et} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \theta$$

où θ est l'angle géométrique entre les deux vecteurs, compris entre 0 et 180°.

En égalant les deux, on obtient l'angle :

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$$

$\cos \theta$	Angle	Position des vecteurs
1	0°	même direction, même sens
entre 0 et 1	aigu	—
0	90°	orthogonaux
entre -1 et 0	obtus	—
-1	180°	même direction, sens opposés

Projection. Si H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) , alors

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$$

et ce produit vaut $AB \times AH$ si $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont le même sens, $-AB \times AH$ sinon.

Norme d'une somme.

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

⚠ Le résultat d'un $\cos \theta$ doit toujours tomber dans $[-1 ; 1]$: au-delà, c'est qu'une norme ou un produit scalaire est faux.

Correction de l'exercice 1 – Un angle de 45°

On confronte les deux expressions du produit scalaire. En coordonnées,

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 1 + 1 \times 3 = 5$; les normes valent $\|\vec{u}\| = \sqrt{5}$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{10}$. Donc

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{5}{\sqrt{5} \times \sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

On reconnaît une valeur remarquable : $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, et l'angle est aigu, donc $\theta = 45^\circ$.

Contrôle : le cosinus, environ 0,707, est bien compris entre -1 et 1.

Réponse. $\theta = 45^\circ$.

Correction de l'exercice 2 – Angle avec l'axe des abscisses

Le produit scalaire avec $\vec{i}(1 ; 0)$ vaut $4 \times 1 + 3 \times 0 = 4$: il redonne l'abscisse de $\vec{u}$. Avec $\|\vec{u}\| = \sqrt{16 + 9} = 5$ et $\|\vec{i}\| = 1$:

$$\cos \theta = \frac{4}{5 \times 1} = 0,8 \quad \theta \approx 36,87^\circ$$

C'est l'angle que fait $\vec{u}$ avec l'axe des abscisses : $\vec{u}$ monte de 3 quand il avance de 4. Plus généralement, pour un vecteur $(x; y)$, cet angle vérifie $\cos \theta = \frac{x}{\|\vec{u}\|}$.

Réponse. $\theta \approx 36,87^\circ$.

Correction de l'exercice 3 - Un angle droit

Le produit scalaire vaut $1 \times (-2) + 2 \times 1 = -2 + 2 = 0$. Le cosinus de l'angle est donc nul, quelles que soient les normes :

$$\cos \theta = \frac{0}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = 0 \quad \theta = 90^\circ$$

Les vecteurs sont **orthogonaux**. Il était inutile de calculer les normes : dès que le produit scalaire est nul, l'angle est droit. On retrouve d'ailleurs la règle des coordonnées échangées : $(1; 2)$ et $(-2; 1)$.

Réponse. $\theta = 90^\circ$: les vecteurs sont orthogonaux.

Correction de l'exercice 4 - Un angle obtus

Le produit scalaire vaut $1 \times 2 + (-3) \times 3 = 2 - 9 = -7$, et les normes $\|\vec{u}\| = \sqrt{10} \approx 3,162$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{13} \approx 3,606$. Donc

$$\cos \theta = \frac{-7}{\sqrt{10} \times \sqrt{13}} = \frac{-7}{\sqrt{130}} \approx -0,6139$$

et la calculatrice donne $\theta \approx 127,87^\circ$.

Contrôle : le cosinus est négatif, l'angle est bien **obtus**, compris entre 90° et 180° .

Réponse. $\theta \approx 127,87^\circ$.

Correction de l'exercice 5 - Utiliser les normes et l'angle

Lorsque l'on connaît les normes et l'angle, on utilise la seconde expression du produit scalaire :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \theta = 5 \times 7 \times \cos 60^\circ = 35 \times 0,5 = 17,5$$

Le résultat est positif, car l'angle est aigu. Comme le cosinus est compris entre -1 et 1 , le produit scalaire de ces deux vecteurs est toujours compris entre -35 (angle de 180°) et 35 (vecteurs de même sens).

Réponse. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 17,5$.

Correction de l'exercice 6 - Retrouver l'angle à partir des normes

On isole le cosinus dans la seconde expression du produit scalaire :

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{-12}{6 \times 4} = -0,5$$

On reconnaît $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$: l'angle vaut $\theta = 120^\circ$, soit $\frac{2\pi}{3}$ radians.

Contrôle : le produit scalaire est négatif, l'angle est bien obtus. Les angles de 0° à 180° ont des cosinus tous différents, ce qui garantit l'unicité de la réponse.

Réponse. $\theta = 120^\circ$, soit $\frac{2\pi}{3}$ rad.

Correction de l'exercice 7 - Un angle dans un triangle

L'angle $\hat{A}$ est l'angle entre $\overrightarrow{AB}(6; 0)$ et $\overrightarrow{AC}(2; 4)$. Le produit scalaire vaut $6 \times 2 + 0 \times 4 = 12$, et les normes $AB = 6$ et $AC = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$. Donc

$$\cos \hat{A} = \frac{12}{6 \times \sqrt{20}} = \frac{2}{\sqrt{20}} \approx 0,4472 \quad \hat{A} \approx 63,43^\circ$$

Le cosinus est positif, l'angle est aigu, ce que confirme la figure. **Autre contrôle** : C se projette en $H(2; 0)$ sur (AB) , et $\cos \hat{A} = \frac{AH}{AC} = \frac{2}{\sqrt{20}}$.

Réponse. $\hat{A} \approx 63,43^\circ$.

Correction de l'exercice 8 - Un triangle isocèle

a) $\overrightarrow{AB}(4; 1)$ et $\overrightarrow{AC}(1; 4)$ donnent $AB = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$ et $AC = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17}$: $AB = AC$, le triangle est isocèle en A .

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 1 + 1 \times 4 = 8$, et le produit des normes vaut $\sqrt{17} \times \sqrt{17} = 17$:

$$\cos \hat{A} = \frac{8}{17} \approx 0,4706 \quad \hat{A} \approx 61,93^\circ$$

L'angle est proche de 60° , mais le triangle n'est pas équilatéral :

$$BC = \sqrt{(2 - 5)^2 + (5 - 2)^2} = \sqrt{18} \approx 4,243, \text{ différent de } \sqrt{17} \approx 4,123.$$

Réponse. a) $AB = AC = \sqrt{17}$ · b) $\hat{A} \approx 61,93^\circ$.

Correction de l'exercice 9 - Distance entre deux points

La distance AB est la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$, de coordonnées $(7 - 2; 11 - (-1)) = (5; 12)$. Attention au signe : $11 - (-1) = 12$, et non 10.

$$AB = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

On peut aussi écrire $AB^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = 5 \times 5 + 12 \times 12 = 169$: le carré d'une distance est le produit scalaire d'un vecteur par lui-même.

Réponse. $AB = 13$.

Correction de l'exercice 10 - Norme d'une somme

On développe le carré scalaire de la somme, comme une identité remarquable :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 9 + 12 + 25 = 46$$

donc $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{46} \approx 6,78$.

Ce résultat est inférieur à $3 + 5 = 8$: la norme d'une somme ne dépasse jamais la somme des normes, et ne l'atteint que pour deux vecteurs colinéaires de même sens. Ici,

$$\cos \theta = \frac{6}{15} = 0,4 : \text{ les vecteurs forment un angle d'environ } 66^\circ.$$

Réponse. $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{46} \approx 6,78$.

Correction de l'exercice 11 - Deux forces

a) Avec les intensités et l'angle :

$$\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 = 300 \times 200 \times \cos 45^\circ = 60\,000 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 42\,426$$

b) L'intensité de la résultante se calcule avec le carré scalaire de la somme :

$\|\vec{F}_1 + \vec{F}_2\|^2 = 300^2 + 2 \times 42\,426 + 200^2 = 90\,000 + 84\,852 + 40\,000 = 214\,852$, d'où une résultante d'environ $\sqrt{214\,852} \approx 463,5$ N.

Elle est inférieure à $300 + 200 = 500$ N, car les deux forces ne tirent pas exactement dans la même direction. Si elles étaient perpendiculaires, on obtiendrait $\sqrt{130\,000} \approx 360,6$ N.

Réponse. a) environ 42 426 · b) environ 464 N.

Correction de l'exercice 12 - Projection orthogonale

a) La droite (AB) est l'axe des abscisses. Le projeté orthogonal de C(3 ; 5) sur cet axe garde l'abscisse et annule l'ordonnée : H(3 ; 0).

b) Avec $\vec{AB}(8 ; 0)$, $\vec{AC}(3 ; 5)$ et $\vec{AH}(3 ; 0)$:

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 8 \times 3 + 0 \times 5 = 24 \quad \vec{AB} \cdot \vec{AH} = 8 \times 3 + 0 \times 0 = 24$$

Les deux produits sont égaux : seule la **part** de $\vec{AC}$ dans la direction de $\vec{AB}$ intervient. Comme H est du même côté que B par rapport à A, on a aussi $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AH = 8 \times 3$. Si H était de l'autre côté de A, le produit serait négatif.

Réponse. a) H(3 ; 0) · b) les deux produits valent 24.

Correction de l'exercice 13 - Angle entre deux directions

L'angle entre les deux glissières se calcule avec leurs vecteurs directeurs. Le produit scalaire vaut $1 \times 5 + 2 \times 1 = 7$, et les normes $\sqrt{5} \approx 2,236$ et $\sqrt{26} \approx 5,099$:

$$\cos \theta = \frac{7}{\sqrt{5} \times \sqrt{26}} = \frac{7}{\sqrt{130}} \approx 0,6139 \quad \theta \approx 52,13^\circ$$

Le cosinus positif confirme un angle aigu. On retrouve, au signe près, le cosinus de l'exercice « Un angle obtus » : les deux angles, $52,13^\circ$ et $127,87^\circ$, sont supplémentaires (leur somme vaut 180°).

Réponse. Environ $52,13^\circ$.

Correction de l'exercice 14 - Un cosinus impossible

Le calcul de l'élève est juste, $\frac{25}{4 \times 5} = 1,25$, mais un cosinus est toujours compris entre -1 et 1 : la valeur 1,25 est impossible. Ce sont donc les données qui sont incohérentes.

En effet, puisque $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$ et $|\cos \theta| \leq 1$:

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| = 20$$

Le produit scalaire ne peut pas valoir 25 : soit il est faux, soit l'une des normes l'est. La valeur 20 n'est atteinte que pour deux vecteurs colinéaires de même sens. Réflexe : comparer le produit scalaire au produit des normes avant de diviser.

Réponse. Impossible : $|\vec{u} \cdot \vec{v}|$ ne peut pas dépasser $4 \times 5 = 20$.

Correction de l'exercice 15 - Deux câbles de levage

a) La longueur de chaque câble est la norme de son vecteur : $\|\vec{u}\| = \sqrt{9 + 16} = 5$ m et $\|\vec{v}\| = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} \approx 6,32$ m.

b) Le produit scalaire vaut $3 \times 6 + 4 \times 2 = 26$, d'où

$$\cos \theta = \frac{26}{5\sqrt{40}} \approx \frac{26}{31,62} \approx 0,8222 \quad \theta \approx 34,70^\circ$$

Les deux vecteurs pointent vers le haut et la droite, un angle modéré est attendu. Cet

angle détermine la répartition de la charge entre les deux câbles : plus il est grand, plus chaque câble est sollicité.

Réponse. a) 5 m et $\sqrt{40} \approx 6,32$ m · b) environ $34,70^\circ$.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : un triangle complet

a) $\overrightarrow{AB}(6; 2)$, $\overrightarrow{AC}(2; 6)$ et $\overrightarrow{BC}(-4; 4)$ donnent $AB = \sqrt{40} \approx 6,32$, $AC = \sqrt{40} \approx 6,32$ et $BC = \sqrt{32} \approx 5,66$.

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 12 + 12 = 24$ et $AB \times AC = 40$:

$$\cos \hat{A} = \frac{24}{40} = 0,6 \quad \hat{A} \approx 53,13^\circ$$

c) On teste chaque sommet : en A, le produit vaut 24 ; en B,

$\overrightarrow{BA}(-6; -2) \cdot \overrightarrow{BC}(-4; 4) = 24 - 8 = 16$; en C, $\overrightarrow{CA}(-2; -6) \cdot \overrightarrow{CB}(4; -4) = -8 + 24 = 16$.

Aucun n'est nul : le triangle **n'est pas** rectangle. Il est isocèle en A, puisque $AB = AC$.

d) Le périmètre vaut $2\sqrt{40} + \sqrt{32} \approx 6,3246 + 6,3246 + 5,6569 \approx 18,31$. Les angles à la base valent chacun $\frac{180 - 53,13}{2} \approx 63,44^\circ$.

Réponse. a) $\sqrt{40}$, $\sqrt{40}$ et $\sqrt{32}$ · b) $\hat{A} \approx 53,13^\circ$ · c) non, il est isocèle en A · d) environ 18,31.