

Plaquette 2 – Produit scalaire en coordonnées et orthogonalité

Produit scalaire — Première STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Avec les coordonnées. Dans un repère **orthonormé**, si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

— Le résultat est un **nombre**, jamais un vecteur.

— **Coordonnées d'un vecteur** : si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$, alors $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Norme.

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$$

Orthogonalité. C'est le test le plus utilisé du chapitre :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Signe et angle.

Signe de $\vec{u} \cdot \vec{v}$	Angle entre les vecteurs
positif	aigu (moins de 90°)
nul	droit
négatif	obtus (plus de 90°)

Propriétés de calcul.

— **Symétrie** : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

— **Distributivité** : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.

— **Facteur** : $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$.

⚠ La formule $xx' + yy'$ n'est valable que dans un repère **orthonormé** : c'est toujours le cas dans ce chapitre, mais l'hypothèse doit être vraie.

Correction de l'exercice 1 – Un premier calcul

Dans un repère orthonormé, le produit scalaire est la somme des produits des coordonnées de même rang :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' = 3 \times 4 + (-2) \times 5 = 12 - 10 = 2$$

Le résultat est un **nombre**, pas un vecteur. Il est positif : l'angle formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est **aigu**. Il est cependant petit devant le produit des normes, $\sqrt{13} \times \sqrt{41} \approx 23$: l'angle est proche de l'angle droit, environ 85° .

Réponse. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$.

Correction de l'exercice 2 – Avec des coordonnées négatives

On multiplie les abscisses entre elles, les ordonnées entre elles, puis on additionne :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-1) \times 3 + 6 \times 2 = -3 + 12 = 9$$

Le résultat est positif, donc l'angle entre les deux vecteurs est aigu. L'ordre n'a pas d'importance : $\vec{v} \cdot \vec{u}$ donne aussi 9. L'erreur à éviter consiste à additionner les coordonnées avant de multiplier, ce qui n'a aucun sens géométrique.

Réponse. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 9$.

Correction de l'exercice 3 – Tester l'orthogonalité

Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul. Ici

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 5 + 5 \times (-2) = 10 - 10 = 0$$

donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux**.

On remarque qu'on passe de $(2; 5)$ à $(5; -2)$ en échangeant les coordonnées et en changeant un signe. C'est une règle générale : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ sont toujours orthogonaux, puisque $xy + y(-x) = 0$. Par exemple, $(3; 7)$ et $(7; -3)$ donnent $21 - 21 = 0$.

Réponse. Oui : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Correction de l'exercice 4 – Deux vecteurs perpendiculaires

Le produit scalaire vaut $3 \times 8 + 4 \times (-6) = 24 - 24 = 0$: les vecteurs sont **orthogonaux**.

Les normes se calculent avec $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{9 + 16} = 5 \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{64 + 36} = 10$$

$\vec{v}$ est deux fois plus long que $\vec{u}$ et pourtant perpendiculaire à lui : l'orthogonalité ne dépend pas des longueurs. Ainsi $\frac{1}{2}\vec{v} = (4; -3)$, de même direction que $\vec{v}$, est lui aussi orthogonal à $\vec{u}$.

Réponse. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$; $\|\vec{u}\| = 5$ et $\|\vec{v}\| = 10$.

Correction de l'exercice 5 – Trouver une coordonnée manquante

On traduit l'orthogonalité par un produit scalaire nul :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \times 3 + y \times 6 = 12 + 6y = 0 \Leftrightarrow y = -2$$

Le vecteur cherché est $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Vérification : $4 \times 3 + (-2) \times 6 = 12 - 12 = 0$. Tous les vecteurs colinéaires à celui-ci, comme $(2; -1)$ ou $(-4; 2)$, sont eux aussi orthogonaux à $\vec{v}$; mais avec une abscisse imposée égale à 4, la solution est unique.

Réponse. $y = -2$.

Correction de l'exercice 6 – Un angle droit dans un triangle

Le triangle est rectangle en A si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, issus de A, sont orthogonaux. On calcule leurs coordonnées : $\overrightarrow{AB}(4 - 1; 3 - 2) = (3; 1)$ et $\overrightarrow{AC}(0 - 1; 5 - 2) = (-1; 3)$.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times (-1) + 1 \times 3 = 0$$

Le triangle est donc **rectangle en A**. De plus, $AB = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$ et $AC = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$: il est rectangle **isocèle**.

Contrôle par Pythagore : $BC^2 = (0 - 4)^2 + (5 - 3)^2 = 20 = 10 + 10 = AB^2 + AC^2$.

Réponse. Oui, rectangle (et même isocèle) en A : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

Correction de l'exercice 7 - Norme et produit scalaire d'un vecteur par lui-même

La norme se calcule avec $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$.

Le produit scalaire de $\vec{u}$ par lui-même vaut $5 \times 5 + 12 \times 12 = 169$. On retrouve le carré de la norme :

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 = 13^2 = 169$$

C'est une propriété générale, puisque $\vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2$. Elle permet d'obtenir le carré d'une longueur sans calculer de racine, ce qui sert dans les démonstrations et dans le théorème d'Al-Kashi.

Réponse. $\|\vec{u}\| = 13$ et $\vec{u} \cdot \vec{u} = 169 = 13^2$.

Correction de l'exercice 8 - Utiliser la distributivité

Première méthode : additionner d'abord. $\vec{v} + \vec{w}$ a pour coordonnées $(1 + 4; -1 + 2) = (5; 1)$, donc $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = 2 \times 5 + 3 \times 1 = 13$.

Seconde méthode : développer. Le produit scalaire est distributif :

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} = (2 - 3) + (8 + 6) = -1 + 14 = 13$$

Les deux méthodes concordent. La seconde devient indispensable lorsque les vecteurs ne sont connus que par leurs normes et leurs angles, sans coordonnées.

Réponse. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = 13$ par les deux méthodes.

Correction de l'exercice 9 - Lire le signe

Le produit scalaire vaut

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times (-3) + 1 \times 1 = -6 + 1 = -5$$

Il est **négatif** : l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est **obtus**. C'est cohérent avec la figure : $\vec{u}$ pointe vers la droite, $\vec{v}$ vers la gauche, et tous deux montent légèrement.

Le signe du produit scalaire donne la nature de l'angle sans aucun calcul d'angle : positif pour un angle aigu, nul pour un angle droit, négatif pour un angle obtus.

Réponse. $\vec{u} \cdot \vec{v} = -5 < 0$: l'angle est obtus.

Correction de l'exercice 10 - Construire un vecteur orthogonal

On utilise la règle des coordonnées échangées : pour $\vec{u}(x; y)$, le vecteur $(y; -x)$ est orthogonal, car $xy + y(-x) = 0$. Pour $\vec{u}(5; -3)$, cela donne $(-3; -5)$, et son opposé $\vec{w}(3; 5)$ convient aussi :

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 5 \times 3 + (-3) \times 5 = 15 - 15 = 0$$

Pour un vecteur de norme différente, on multiplie $\vec{w}$ par 2 : $(6; 10)$, et $30 - 30 = 0$. Sa norme vaut $2\sqrt{34}$, contre $\sqrt{34}$ pour $\vec{w}$. Il existe une **infinité** de vecteurs orthogonaux à $\vec{u}$: tous ceux qui sont colinéaires à $\vec{w}$.

Réponse. Par exemple $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 11 - Des vecteurs colinéaires

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 6 + 3 \times 9 = 12 + 27 = 39$.

b) $\|\vec{u}\| = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{36 + 81} = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}$, donc

$$\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| = \sqrt{13} \times 3\sqrt{13} = 39$$

Le produit scalaire est **égal** au produit des normes : avec la formule $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$, cela impose $\cos \theta = 1$, donc $\theta = 0$. C'est cohérent : $\vec{v} = 3\vec{u}$, les deux vecteurs ont la même direction et le même sens.

Réponse. a) 39 · b) 39 également : les vecteurs sont colinéaires et de même sens.

Correction de l'exercice 12 - Un losange

a) $\overrightarrow{AB}(4; 1)$ et $\overrightarrow{DC}(5 - 1; 5 - 4) = (4; 1)$: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, donc $ABCD$ est un parallélogramme.

b) Les diagonales sont portées par $\overrightarrow{AC}(5; 5)$ et $\overrightarrow{BD}(1 - 4; 4 - 1) = (-3; 3)$:

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 5 \times (-3) + 5 \times 3 = 0$$

Les diagonales sont perpendiculaires. Un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires est un **losange**.

Contrôle : $AB = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$ et $AD = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17}$, deux côtés consécutifs égaux. Le losange a pour côté $\sqrt{17} \approx 4,12$.

Réponse. a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ · b) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$: c'est un losange.

Correction de l'exercice 13 - Un point sur un cercle

Le triangle est rectangle en M si $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux. On a $\overrightarrow{MA}(-3; -3)$ et $\overrightarrow{MB}(3; -3)$, donc

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (-3) \times 3 + (-3) \times (-3) = -9 + 9 = 0$$

Le triangle AMB est **rectangle en M** .

Interprétation : $[AB]$, de longueur 6, est un diamètre du cercle de centre O et de rayon 3, et $OM = 3$, donc M est sur ce cercle. On retrouve la propriété du cercle : tout point du cercle, autre que A et B , voit le diamètre sous un angle droit.

Réponse. $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$: le triangle est rectangle en M .

Correction de l'exercice 14 - Deux calculs à ne pas confondre

Produit scalaire : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 3 + 4 \times (-2) = 3 - 8 = -5$, un nombre qui peut être négatif.

Norme de la somme : $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(4; 2)$, donc

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4,47$$

Les deux calculs sont de nature différente : le produit scalaire est un nombre réel quelconque, la norme est une **longueur**, toujours positive. **Contrôle** :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 17 - 10 + 13 = 20.$$

Réponse. $\vec{u} \cdot \vec{v} = -5$ et $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 2\sqrt{5} \approx 4,47$.

Correction de l'exercice 15 - Une plaque rectangulaire

Angle en P : avec $\overrightarrow{PQ}(6; 2)$ et $\overrightarrow{PS}(-2; 6)$,

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PS} = 6 \times (-2) + 2 \times 6 = -12 + 12 = 0$$

donc l'angle en P est droit.

Angle en Q : avec $\overrightarrow{QP}(-6; -2)$ et $\overrightarrow{QR}(4 - 6; 8 - 2) = (-2; 6)$, le produit scalaire vaut $12 - 12 = 0$: l'angle en Q est droit.

De plus, $PQ = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40}$ et $PS = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40}$. Comme $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$, $PQRS$ est un

parallélogramme à angle droit et à côtés consécutifs égaux : la plaque est un **carré** de côté $\sqrt{40} \approx 6,32$.

Réponse. Les deux produits scalaires sont nuls ; la plaque est même un carré de côté $\sqrt{40}$.

Correction de l'exercice 16 - Synthèse : la nature d'un quadrilatère

a) $\overrightarrow{AB}(2 + 2; -1 - 1) = (4; -2)$ et $\overrightarrow{DC}(4 - 0; 3 - 5) = (4; -2)$: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, donc $ABCD$ est un parallélogramme.

b) Avec $\overrightarrow{AD}(2; 4)$:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 4 \times 2 + (-2) \times 4 = 0$$

Les côtés $[AB]$ et $[AD]$ sont perpendiculaires : le parallélogramme a un angle droit, c'est un **rectangle**.

c) $AB = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ et $AD = \sqrt{4 + 16} = 2\sqrt{5}$, environ 4,47.

d) Un rectangle à côtés consécutifs égaux est un **carré**, d'aire $AB \times AD = 2\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} = 20$ unités d'aire. **Contrôle** : la diagonale vérifie $AC^2 = 36 + 4 = 40 = 20 + 20$.

Réponse. a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ · b) produit nul, angle droit · c) $AB = AD = 2\sqrt{5}$ · d) un carré d'aire 20.