

Plaquette 4 – Travail d'une force et puissance

Produit scalaire — Première STI2D

Corrections détaillées

Boîte à outils

Travail d'une force constante.

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = \|\vec{F}\| \times \|\vec{d}\| \times \cos \theta$$

- W est en **joules** (J), $\|\vec{F}\|$ en newtons (N), $\|\vec{d}\|$ en mètres (m).
- θ est l'angle entre la force et le déplacement.

Angle	$\cos \theta$	Travail	Nom
0°	1	$W = F \times d$, maximal	moteur
aigu	entre 0 et 1	positif	moteur
90°	0	nul	ni moteur ni résistant
obtus	négatif	négatif	résistant
180°	-1	$W = -F \times d$	résistant (frottement)

Avec les coordonnées. Si $\vec{F} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$ et $\vec{d} \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix}$:

$$W = F_x d_x + F_y d_y$$

Travail du poids. Pour une masse m qui **descend** d'une hauteur h :

$$W = m \times g \times h \quad (g \approx 9,81 \text{ N/kg})$$

Il est négatif si l'objet monte.

Puissance moyenne.

$$P = \frac{W}{t} \quad (\text{en watts, avec } t \text{ en secondes})$$

Bilan. Les travaux s'**additionnent** : $W_{\text{total}} = W_{\text{moteur}} + W_{\text{poids}} + W_{\text{frottements}}$.

△ Une force perpendiculaire au déplacement ne travaille **pas**, même si elle est très intense : porter une caisse à bout de bras sur un sol horizontal ne demande aucun travail au sens mécanique.

Correction de l'exercice 1 – Une force dans le sens du déplacement

Le travail d'une force constante $\vec{F}$ sur un déplacement rectiligne $\vec{d}$ est leur produit scalaire :

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = F \times d \times \cos \theta$$

La force est horizontale, dans le sens du déplacement : $\theta = 0^\circ$ et $\cos 0 = 1$. Donc $W = 250 \times 12 \times 1 = 3\,000 \text{ J}$.

Le travail est positif : il est **moteur**. Les unités sont cohérentes, des newtons multipliés par des mètres donnent des joules. Pour fixer un ordre de grandeur, 3 kJ suffisent à soulever une masse de 30 kg d'environ 10 m, car $30 \times 9,81 \times 10 \approx 2\,943 \text{ J}$.

Réponse. $W = 3\,000 \text{ J}$.

Correction de l'exercice 2 - Une force inclinée

La force fait un angle de 30° avec le déplacement horizontal, donc

$$W = F \times d \times \cos 30^\circ = 400 \times 15 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 6\,000 \times 0,866 \approx 5\,196 \text{ J}$$

Avec une corde horizontale, on aurait obtenu 6 000 J : l'inclinaison fait perdre environ 804 J, soit 13,4 %. La composante verticale de la force, $400 \times \sin 30^\circ = 200 \text{ N}$, ne participe pas au déplacement horizontal. Pour exploiter au mieux l'effort, il faut tirer le plus horizontalement possible.

Réponse. $W \approx 5\,196 \text{ J}$.

Correction de l'exercice 3 - Une force qui ne travaille pas

La force exercée vers le haut est verticale, le déplacement est horizontal : ils forment un angle de 90° , et $\cos 90^\circ = 0$.

$$W = F \times d \times \cos 90^\circ = 0 \text{ J}$$

Au sens mécanique, cette force ne fournit **aucun** travail, puisqu'elle est perpendiculaire au déplacement. L'opérateur se fatigue pourtant : la fatigue vient du maintien de la contraction musculaire, pas d'un travail mécanique. En revanche, soulever la caisse d'un mètre produirait un travail d'environ $18 \times 9,81 \times 1 \approx 177 \text{ J}$.

Réponse. $W = 0 \text{ J}$: la force est perpendiculaire au déplacement.

Correction de l'exercice 4 - Un travail résistant

Le frottement s'oppose au déplacement : l'angle vaut 180° et $\cos 180^\circ = -1$.

$$W = 180 \times 12 \times (-1) = -2\,160 \text{ J}$$

Le travail est **négatif** : il est **résistant**, la force retire de l'énergie au chariot, qui est dissipée en chaleur.

Si l'opérateur de l'exercice « Une force dans le sens du déplacement » fournit 3 000 J sur les mêmes 12 m, il ne reste que $3\,000 - 2\,160 = 840 \text{ J}$ réellement utiles, soit 28 % de son effort.

Réponse. $W = -2\,160 \text{ J}$ (travail résistant).

Correction de l'exercice 5 - Travail en coordonnées

En coordonnées, dans un repère orthonormé, le travail est la somme des produits des composantes :

$$W = F_x d_x + F_y d_y = 120 \times 8 + (-50) \times 0 = 960 \text{ J}$$

Le déplacement est purement horizontal : seule la composante horizontale de la force travaille.

L'intensité de la force vaut $\sqrt{120^2 + 50^2} = \sqrt{16\,900} = 130 \text{ N}$. Une force horizontale de 130 N aurait fourni $130 \times 8 = 1\,040 \text{ J}$: la composante verticale de 50 N est perdue pour le travail.

Réponse. $W = 960 \text{ J}$.

Correction de l'exercice 6 - Force et déplacement obliques

On calcule le produit scalaire en coordonnées :

$$W = 300 \times 10 + 200 \times 5 = 3\,000 + 1\,000 = 4\,000 \text{ J}$$

Le travail est positif, donc moteur.

Contrôle par l'angle : la force vaut $\sqrt{130\,000} \approx 360,6$ N et le déplacement $\sqrt{125} \approx 11,18$ m, de produit environ 4 031. Le cosinus de l'angle vaut donc $\frac{4\,000}{4\,031} \approx 0,992$, soit un angle d'environ $7,1^\circ$: la force est presque alignée avec le déplacement, d'où un travail proche du maximum possible.

Réponse. $W = 4\,000$ J.

Correction de l'exercice 7 - Retrouver l'angle

On isole le cosinus dans $W = F \times d \times \cos \theta$:

$$\cos \theta = \frac{W}{F \times d} = \frac{1\,800}{200 \times 15} = \frac{1\,800}{3\,000} = 0,6$$

d'où $\theta \approx 53,13^\circ$.

Contrôle : 0,6 est bien compris entre -1 et 1 . Le travail maximal possible, force alignée, serait de 3 000 J : seuls 60 % de l'effort sont exploités. Une corde trop inclinée gaspille une partie de la force.

Réponse. $\theta \approx 53,13^\circ$.

Correction de l'exercice 8 - Retrouver la force

La force est dans la direction du déplacement, donc $\cos 0 = 1$ et $W = F \times d$. On isole la force :

$$F = \frac{W}{d} = \frac{4\,500}{9} = 500 \text{ N}$$

Contrôle : $500 \times 9 = 4\,500$ J. Cette force correspond au poids d'une masse d'environ $\frac{500}{9,81} \approx 51$ kg. Si la traction était inclinée de 30° , il faudrait $\frac{500}{\cos 30^\circ} \approx 577$ N pour fournir le même travail : aligner la traction économise l'effort.

Réponse. $F = 500$ N.

Correction de l'exercice 9 - Travail du poids

Le poids est vertical, vers le bas, d'intensité $P = mg = 80 \times 9,81 = 784,8$ N. Le long de la glissière, seule la descente verticale de 3 m compte : le produit scalaire du poids par le déplacement vaut $P \times h$.

$$W = m \times g \times h = 784,8 \times 3 = 2\,354,4 \text{ J}$$

Le travail est positif : à la descente, le poids est **moteur**. À la montée, il vaudrait $-2\,354,4$ J. Seule la **dénivellation** compte, pas la longueur du trajet : une glissière deux fois plus longue, pour la même hauteur, donnerait le même travail.

Réponse. $W = 2\,354,4$ J (travail moteur).

Correction de l'exercice 10 - Puissance moyenne

a) La puissance moyenne est le travail divisé par la durée :

$$P = \frac{W}{t} = \frac{3\,000}{6} = 500 \text{ W}$$

b) Pour le même travail en 2 s, $P = \frac{3\,000}{2} = 1\,500$ W, trois fois plus.

Le travail est le même dans les deux cas, 3 000 J : il mesure l'**énergie** transférée, tandis que la puissance mesure la **rapidité** du transfert. À travail égal, un actionneur plus

rapide doit être plus puissant.

Réponse. a) 500 W · b) 1 500 W.

Correction de l'exercice 11 – Bilan de deux travaux

a) Les travaux des différentes forces s'additionnent :

$$W_{\text{total}} = 5\,000 + (-1\,200) = 3\,800 \text{ J}$$

b) La part perdue par frottement vaut $\frac{1\,200}{5\,000} = 0,24$, soit 24 % du travail moteur. Le rendement est donc $\frac{3\,800}{5\,000} = 0,76$, soit 76 % ; **contrôle** : $76 + 24 = 100$.

L'énergie perdue est dissipée en chaleur dans les guidages. Pour améliorer le rendement, on peut lubrifier, changer de matériaux ou réduire les efforts de serrage.

Réponse. a) 3 800 J · b) 24 % perdus, soit un rendement de 76 %.

Correction de l'exercice 12 – Une corde inclinée de 25°

a) La force fait un angle de 25° avec le déplacement :

$$W = 150 \times 20 \times \cos 25^\circ \approx 3\,000 \times 0,9063 \approx 2\,719 \text{ J}$$

b) La composante horizontale de la force vaut $F \cos 25^\circ \approx 150 \times 0,9063 \approx 136 \text{ N}$.

Contrôle : $136 \times 20 \approx 2\,720 \text{ J}$, le même travail aux arrondis près ; seule cette composante travaille.

La composante verticale, $150 \times \sin 25^\circ \approx 63,4 \text{ N}$, ne produit aucun travail. Elle n'est pas inutile pour autant : en soulageant l'appui du chariot sur le sol, elle réduit les frottements.

Réponse. a) environ 2 719 J · b) environ 136 N.

Correction de l'exercice 13 – Deux façons de tirer

On compare les travaux, et non les intensités des forces.

Traction inclinée : $W_1 = 500 \times 10 \times \cos 40^\circ \approx 5\,000 \times 0,766 \approx 3\,830 \text{ J}$.

Traction horizontale : $W_2 = 420 \times 10 \times \cos 0 = 4\,200 \text{ J}$.

$$W_2 = 4\,200 \text{ J} > W_1 \approx 3\,830 \text{ J}$$

La traction horizontale de 420 N fournit le plus grand travail, bien qu'elle soit 80 N moins intense. La traction de 500 N inclinée de 40° n'a qu'une composante utile de $500 \times 0,766 = 383 \text{ N}$: l'inclinaison fait perdre près d'un quart de l'effort.

Réponse. La traction horizontale de 420 N (4 200 J contre environ 3 830 J).

Correction de l'exercice 14 – Monter puis descendre

Le poids de la masse vaut $P = 40 \times 9,81 = 392,4 \text{ N}$, vertical vers le bas.

Montée : le poids est opposé au déplacement vertical de 5 m, son travail est résistant : $W_1 = -392,4 \times 5 = -1\,962 \text{ J}$.

Descente : poids et déplacement ont le même sens, $W_2 = +1\,962 \text{ J}$.

$$W_{\text{total}} = -1\,962 + 1\,962 = 0 \text{ J}$$

Sur un trajet qui revient au point de départ, le travail du poids est nul : il ne dépend que de la différence d'altitude. Ce n'est pas le cas des frottements, dont le travail est négatif à l'aller comme au retour.

Réponse. -1 962 J à la montée, +1 962 J à la descente, total nul.

Correction de l'exercice 15 – Puissance d'un monte-charge

a) Pour soulever la charge à vitesse constante, le moteur exerce une force égale au poids, $350 \times 9,81 = 3\,433,5 \text{ N}$, dans le sens du déplacement :

$$W = 3\,433,5 \times 9 \approx 30\,902 \text{ J}$$

b) La puissance moyenne vaut $P = \frac{W}{t} = \frac{30\,902}{12} \approx 2\,575 \text{ W}$, soit environ 2,6 kW.

C'est l'ordre de grandeur d'un petit moteur industriel. En pratique, le moteur doit être plus puissant à cause de son rendement : avec 80 %, il faudrait $\frac{2\,575}{0,8} \approx 3\,219 \text{ W}$ absorbés.

Réponse. a) environ 30 900 J · b) environ 2 575 W, soit 2,6 kW.

Correction de l'exercice 16 – Synthèse : un convoyeur incliné

a) La force motrice est parallèle au plan, donc au déplacement :

$$W_{\text{moteur}} = 210 \times 12 = 2\,520 \text{ J.}$$

b) La caisse pèse $25 \times 9,81 = 245,25 \text{ N}$ et **monte** de 2,4 m : le travail du poids est résistant, $W_{\text{poids}} = -245,25 \times 2,4 = -588,6 \text{ J}$. C'est la hauteur, et non les 12 m, qui intervient.

c) Les frottements s'opposent au déplacement : $W_{\text{frott}} = -45 \times 12 = -540 \text{ J}$. Le travail total vaut

$$W_{\text{total}} = 2\,520 - 588,6 - 540 = 1\,391,4 \text{ J}$$

d) La puissance motrice vaut $\frac{2\,520}{8} = 315 \text{ W}$. En une heure, pour 240 caisses, l'énergie motrice vaut $240 \times 2\,520 = 604\,800 \text{ J}$, soit $\frac{604\,800}{3\,600\,000} = 0,168 \text{ kWh}$, environ 0,03 € à 0,18 € le kWh. Seuls $\frac{588,6}{2\,520} \approx 23,4 \%$ du travail moteur servent à élever les caisses ; les frottements en consomment 21,4 %.

Réponse. a) 2 520 J · b) -588,6 J · c) -540 J et 1 391,4 J au total · d) 315 W et 0,168 kWh par heure.